

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

# **Estabilidade em fluidização: O efeito da inclusão da temperatura granular**

Autor: **Alexandre Marconi de Souza da Costa**  
Orientador: **Prof. Dr. Márcio Luiz de Souza-Santos**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

## **Estabilidade em fluidização: O efeito da inclusão da temperatura granular**

Autor: **Alexandre Marconi de Souza da Costa**  
Orientador: **Prof. Dr. Márcio Luiz de Souza-Santos**

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Térmica e Fluídos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002  
SP – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Costa, Alexandre Marconi de Souza.

C823i A inclusão da temperatura granular no estudo da  
estabilidade em fluidização / Alexandre Marconi de Souza  
da Costa. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Márcio Luiz de Souza-Santos.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Fluidização. 2. Reatores fluidizados. 3.  
Escoamento bifásico. 4. Materiais granulados. 5. Partículas  
– Velocidade. I. Souza-Santos, Márcio Luiz de. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENERGIA**

**TESE DE DOUTORADO**

# **Estabilidade em fluidização: O efeito da inclusão da temperatura granular**

Autor: **Alexandre Marconi de Souza da Costa**

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Luiz de Souza Santos**

---

**Prof. Dr. Márcio Luiz de Souza-Santos, Presidente**  
**DE/FEM/UNICAMP**

---

**Profa. Dra. Arai Augusta Bernárdez Pécora**  
**DETF/FEM/UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Antônio Carlos Bannwart**  
**DEP/FEM/UNICAMP**

---

**Prof. Dr. Antônio Carlos Luiz Lisboa**  
**FEQ/UNICAMP**

---

**Prof. Dra. Maria Inês Re**  
**IPT/SP**

Campinas, 28 de agosto de 2002

**Dedicatória:**

Aos meus pais, Bernadete e Elias, em homenagem às bodas de ouro.

E à Sônia, cuja contribuição não pode ser descrita em poucas palavras.

## **Agradecimentos:**

Ao meu orientador pelos aspectos positivos de sua orientação.

Ao Dr. Didwania pelos aspectos positivos de sua colaboração profissional durante minha estadia na Universidade da Califórnia em San Diego.

À Dan e Jean Lindsey pela calorosa hospedagem durante os meus primeiros dias nos EUA.

À Claire e Robert pelo valioso apoio pessoal nos EUA.

O presente trabalho contou com o suporte financeiro da FAPESP (Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de São Paulo).

Pa/ntez a!nqrwpoi tou~ ei}de/nai o}re/gontai fu/sei  
*Todos os homens, por natureza, desejam saber*  
Aristóteles

## Resumo

COSTA, Alexandre M. S., O efeito da inclusão da temperatura granular no estudo da estabilidade em fluidização, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. p. 170 Tese (Doutorado)

O presente trabalho contém uma nova proposta de estudo da estabilidade linear de sistemas fluidizados. Tal proposta baseia-se na inclusão dos efeitos de variações de energia cinética das partículas sólidas que são conhecidas como temperatura granular.

Inicialmente, é feita uma revisão da análise linear de estabilidade desconsiderando-se o efeito da temperatura granular. Para este modelo, são obtidos resultados similares aos presentemente encontrados na literatura. Em similaridade ao conceito comum ou termodinâmico de temperatura, chamaremos aqui de isotérmica a situação onde os termos de temperatura granular não são considerados.

Partindo-se de conceitos da teoria cinética dos gases, são propostas relações constitutivas para propriedades associadas à fase sólida particulada. Em seguida, desenvolve-se a análise linear de estabilidade para o conjunto formado pelas equações de conservação de massa e quantidade de movimento para a fase fluida e fase sólida particulada, presentes no leito. É mostrado que a conservação de movimento para fase sólida envolve a temperatura granular. São também verificados os efeitos dos diversos parâmetros do modelo aqui propostos sobre a estabilidade de sistemas fluidizados.



Contrariamente ao modelo isotérmico, classicamente investigado na literatura, os resultados do modelo não isotérmico indicam a ocorrência de instabilidades na direção transversal à gravidade. Essas instabilidades transversais são verificadas experimentalmente em leitos fluidizados. O tratamento desenvolvido aqui é inédito e sugere uma possível explicação para a origem dessas instabilidades secundárias.

A diferença de comportamento entre o modelo proposto e os resultados dos demais modelos é interpretada em termos das relações constitutivas dos modelos.

Finalizando, uma comparação preliminar dos resultados do modelo com os obtidos experimentalmente indicam possíveis pontos para melhorias futuras.

#### *Palavras Chave*

leitos fluidizados, estabilidade, temperatura granular, análise linear.

## **Abstract**

COSTA, Alexandre M. S., The granular temperature effect on the study of the fluidization stability, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. p.170 Thesis (PhD)

This work contains a novel approach to the study of the linear stability of fluidized systems. This approach includes the effects of solid particles kinetic energy variations on the stability of fluidised systems. Such variations or fluctuations are known as granular temperature.

Firstly, a review of linear stability analysis is presented, where no reference to the granular temperature is made. For this case, results similar to the presented in the available literature were obtained. Similarly to the well-known thermodynamic concept of temperature, the situations where the granular temperature is not considered are called isothermal condition.

Beginning with the concepts of gas kinetic theory, constitutive relations are proposed for the properties of particulate solid phase. Next, a linear stability analysis is developed for the set given by the mass and momentum equations for the solid and for the fluid phase in the bed. It is shown that the momentum equation for the solids depends on the granular temperature. The effects of the model parameters on the stability are demonstrated.

In opposition to the isothermal case, classically reported on the literature, the non-isothermal model pointed to the existence of instabilities in the transverse direction to the gravity. These transverse instabilities are experimentally verified in fluidized beds. The approach developed here is original, and suggests a possible explanation for the secondary instabilities.

The differences between the proposed model and others are translated in terms of the constitutive equations.

Finally, preliminary comparisons between the model predictions and experimental verifications indicate possible improvements.

*Keywords*

- fluidized beds, stability, granular temperature, linear analysis

# Índice

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>IV</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>IX</b>
<b>NOMENCLATURA.....</b>	<b>X</b>
<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução.....	1
<b>REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>5</b>
2.1 Primórdios - Os estudos lineares .....	5
2.2 Evidências experimentais.....	7
2.3 Estudos não lineares .....	12
2.4 A inclusão da temperatura granular .....	14
<b>A ANÁLISE ISOTÉRMICA .....</b>	<b>16</b>
3.1 Introdução – A modelagem de contínuo .....	16
3.2 Equações básicas .....	17
3.3 Os tensores de superfície.....	18
3.3.1 A pressão da fase sólida.....	20
3.3.2 A viscosidade da fase sólida .....	22
3.4 O termo de interação entre as fases .....	23
3.4.1 A dinâmica de uma partícula sólida imersa em um fluido: Velocidade relativa constante.....	23
3.4.2 Aceleração relativa não nula.....	26

3.4.3 Formulação proposta para o termo de interação .....	28
3.5 Adimensionalização .....	31
3.6 A análise linear de estabilidade – O estado básico.....	32
3.7 Introdução das perturbações.....	34
3.8 Predições teóricas do fator de crescimento e frequência da instabilidade .....	37
3.8.1 - Os distúrbios correspondentes a fluidização homogênea.....	43
3.9 Hierarquia de ondas e critério de estabilidade .....	44
<b>O CONCEITO DE TEMPERATURA GRANULAR.....</b>	<b>51</b>
4.1 – Introdução.....	51
4.2 A temperatura granular e sua equação de balanço .....	51
4.3 Obtenção de propriedades por análise dimensional - Aproximação Heurística.....	55
4.3.1 O regime inercial .....	55
4.3.2 O regime viscoso .....	59
4.4 O modelo de Buyevich.....	61
4.5 O modelo de Koch e Sangani.....	64
4.6 O modelo proposto .....	66
<b>A ANÁLISE LINEAR NÃO ISOTÉRMICA.....</b>	<b>69</b>
5.1 – Introdução.....	69
5.2 – Equações básicas .....	69
5.3 O estado básico.....	72
5.4 Obtenção do sistema de equações diferenciais parciais lineares.....	74
5.5 A matriz final .....	75
<b>RESULTADOS.....</b>	<b>81</b>
6.1 Introdução.....	81
6.2 Os modos isotérmicos de propagação .....	81
6.3 O efeito da temperatura granular.....	89
6.4 O efeito da razão entre densidades das fases.....	95
6.5 O efeito do coeficiente $n$ , mínima fluidização e máximo empacotamento .....	96
6.6 O efeito da condutividade .....	100

6.7 Resultados obtidos utilizando o modelo de Koch e Sangani .....	103
6.8 Resultados obtidos utilizando o modelo de Buyevich .....	108
6.9 Efeito de propriedades e derivadas sobre a estabilidade .....	113
6.10 Comparação com resultados experimentais .....	119
6.10.1 El-Kaissy e Didwania .....	120
6.10.2 Ham et al. ....	123
<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>127</b>
7.1 Conclusões finais.....	127
7.2 Perspectivas Futuras .....	131
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>133</b>
<b>APÊNDICE A- A CORRELAÇÃO DE RICHARDSON E ZAKI (1954).....</b>	<b>141</b>
<b>APÊNDICE B - A DERIVADA <math>\Gamma_{sw}^2</math> .....</b>	<b>143</b>
<b>APÊNDICE C – O EFEITO DA PAREDE.....</b>	<b>145</b>
<b>APÊNDICE D – VISUALIZAÇÃO .....</b>	<b>150</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Visualização experimental de ondas unidimensionais em um leito fluidizado por líquido (Didwania e Homsy, 1981a). .....	8
Figura 2.2 – Visualização experimental das estruturas bidimensionais ondulares. (Didwania e Homsy, 1981a). .....	9
Figura 2.3 – Visualização do regime turbulento (Didwania e Homsy, 1981a). .....	10
Figura 2.4 – Formação de bolhas no regime turbulento, (Didwania e Homsy, 1981a). .....	11
Figura 4.1 – Relações geométricas para um arranjo de partículas .....	56
Figura 6.1 Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio contra o respectivo número de onda (caso típico) .....	83
Figura 6.2 – Frequência da onda de distúrbio contra o respectivo número de onda (caso típico)	84
Figura 6.3 Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.5$ e $\delta = 0.0001$ ...	85
Figura 6.4 Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.52$ e $\delta = 0.0001$ .	86
Figura 6.5 Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.54$ e $\delta = 0.0001$ .	86
Figura 6.6 Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.56$ e $\delta = 0.0001$ .	87
Figura 6.7 Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.5$ e $\delta = 0.0001$ .....	87

Figura 6.8 - Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.52$ e $\delta = 0.0001$ .....	88
Figura 6.9 Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.54$ e $\delta = 0.0001$ .....	88
Figura 6.10 Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.56$ e $\delta = 0.0001$ .....	89
Figura 6.11 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.5$ e $\delta = 0.0001$ .....	90
Figura 6.12- Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.52$ e $\delta = 0.0001$ .....	91
Figura 6.13 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.54$ e $\delta = 0.0001$ .....	91
Figura 6.14 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.56$ e $\delta = 0.0001$ .....	92
Figura 6.15 – Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.5$ e $\delta = 0.0001$ .....	93
Figura 6.16 – Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.52$ e $\delta = 0.0001$ .....	93
Figura 6.17 - Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.54$ e $\delta = 0.0001$ .....	94
Figura 6.18 - Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.56$ e $\delta = 0.0001$ .....	94
Figura 6.19: Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.5$ e $\delta = 0.1$ .....	95
Figura 6.20 - Frequência da onda de distúrbio para $\phi_0 = 0.5$ e $\delta = 0.1$ .....	96
Figura 6.21 – Efeito $n = 2.0$ sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio.....	97
Figura 6.22 – Efeito $n = 2.0$ sobre a frequência da onda de distúrbio.....	97
Figura 6.23 – Efeito $\phi_{mf} = 0.63$ sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio.....	98



Figura 6.24 – efeito $\phi_{mf} = 0.63$ sobre a frequência da onda de distúrbio .....	99
Figura 6.25 – Efeito $\phi_m = 0.6$ sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio....	99
Figura 6.26 – efeito $\phi_m = 0.6$ sobre a frequência da onda de distúrbio .....	100
Figura 6.27 – Efeito da condutividade nula sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio.....	101
Figura 6.28 – Efeito condutividade nula sobre a frequência da onda de distúrbio .....	101
Figura 6.29 – Efeito condutividade cem vez maior sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio .....	102
Figura 6.30 – efeito aumento condutividade sobre a frequência da onda de distúrbio .....	102
Figura 6.31 – Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Koch e Sangani $\phi_0 = 0.5, \delta = 0.0001$ .....	103
Figura 6.32 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Koch e Sangani $\phi_0 = 0.52, \delta = 0.0001$ .....	104
Figura 6.33 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Koch e Sangani $\phi_0 = 0.54, \delta = 0.0001$ .....	105
Figura 6.34 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Koch e Sangani $\phi_0 = 0.56, \delta = 0.0001$ .....	105
Figura 6.35 – Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Koch e Sangani $\phi_0 = 0.5, \delta = 0.0001$ .....	106
Figura 6.36 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Koch e Sangani $\phi_0 = 0.52, \delta = 0.0001$ .....	106
Figura 6.37 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Koch e Sangani $\phi_0 =$	

0.54, $\delta = 0.0001$ .....	107
Figura 6.38 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Koch e Sangani $\phi_0=0.56$ , $\delta = 0.0001$ .....	107
Figura 6.39 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Buyevich $\phi_0= 0.5$ , $\delta = 0.0001$ .....	108
Figura 6.40 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Buyevich $\phi_0= 0.52$ , $\delta = 0.0001$ .....	109
Figura 6.41 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Buyevich $\phi_0= 0.54$ , $\delta = 0.0001$ .....	109
Figura 6.42 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Buyevich $\phi_0= 0.56$ , $\delta = 0.0001$ .....	110
Figura 6.43 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Buyevich $\phi_0= 0.5$ , $\delta = 0.0001$ .....	111
Figura 6.44- Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Buyevich $\phi_0= 0.52$ , $\delta = 0.0001$ .....	111
Figura 6.45 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Buyevich $\phi_0= 0.54$ , $\delta = 0.0001$ .....	112
Figura 6.46 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Buyevich $\phi_0= 0.56$ , $\delta = 0.0001$ .....	112
Figura 6.47 Efeito do aumento da derivada da pressão de sólidos em relação a fração de sólidos, sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\delta = 0.4$ , $St = 10^4$ , $\phi_0 = 0.56$ ......	114
Figura 6.48 - Efeito do aumento da viscosidade da fase sólida sobre o fator de crescimento da	

amplitude da onda de distúrbio para $\delta = 0.4$ , $St = 10^4$ , $\phi_0 = 0.56$ .....	115
Figura 6.49 – Efeito do aumento da derivada da pressão de sólidos em relação a temperatura granular, sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\delta = 0.4$ , $St = 10^4$ , $\phi_0 = 0.56$ .....	116
Figura 6.50 Efeito do aumento da pressão de sólidos sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\delta = 0.4$ , $St = 10^4$ , $\phi_0 = 0.56$ . ....	117
Figura 6.51 Efeito do aumento da derivada do termo fonte efetivo em relação a temperatura granular, sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\delta = 0.4$ , $St = 10^4$ , $\phi_0 = 0.56$ .....	118
Figura 6.52 – Efeito do aumento da derivada do termo fonte efetivo em relação a fração de sólidos, sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para $\delta = 0.4$ , $St = 10^4$ , $\phi_0 = 0.56$ . ....	119
Figura 6.53 – Comparação entre os fatores de crescimento teóricos e experimentais.....	121
Figura 6.54 – Comparação entre os fatores de crescimento teóricos e experimentais após ajuste .....	122
Figura 6.55 – Estimativas para o módulo de elasticidade da fase sólida utilizando os dados experimentais de Ham et al. (1990) .....	125

## Lista de Tabelas

Tabela 4.1 - Dependência das propriedades da fase particulada nos regimes inerciais e viscosos	61
Tabela 6.1 Valores experimentais conforme El-Kaissy e Homsy (1976) .....	120
Tabela 6.2 Valores experimentais referentes as instabilidades bidimensionais (Didwania e Homsy, 1981) .....	123
Tabela 6.3 – Dados experimentais conforme Ham et al (1990) .....	124

## Nomenclatura

### *Letras Latinas*

$C$  – coeficiente de massa virtual

$C_D$  – coeficiente de arraste

$d_p$  – diâmetro de partícula [m]

$e$  – número de Euler ( $\cong 2.718$ )

$e_r$  – coeficiente de restituição ( $e_r = 1$ , colisão elástica)

$E_s$  – módulo de elasticidade da fase sólida [N m<sup>-2</sup>]

$\hat{F}$  - termo de interação entre as fases [kg m<sup>-2</sup> s<sup>-2</sup>]

$g$  – aceleração local da gravidade [m s<sup>-2</sup>]

$\mathbf{g}$  – vetor aceleração da gravidade [m s<sup>-2</sup>]

$I$  – unitário complexo ( $= \sqrt{-1}$ )

$\mathbf{I}$  – matriz identidade

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{w}$  – vetores cartesianos unitários

$\mathbf{k}$  – vetor número de onda

$m, m_p$  – massa de uma partícula esférica [kg]

$n$  – expoente da equação de Richardson e Zaki

$p$  – pressão [N m<sup>-2</sup>]

T- temperatura granular	$[m^2 s^{-2}]$
t – tempo	$[s]$
<b>u</b> – vetor velocidade da fase fluida	$[m s^{-1}]$
$u_0$ – velocidade superficial do fluido no estado básico	$[m s^{-1}]$
<b>v</b> – vetor velocidade da fase sólida	$[m s^{-1}]$
V – velocidade de propagação da instabilidade	
$v_p$ – volume de uma partícula esférica	$[m^3]$
$v_t$ – velocidade terminal de partícula	$[m s^{-1}]$
<b>x</b> – vetor posição	$[m]$

### ***Letras Gregas***

$\phi$ - fração volumétrica de sólidos	
$\kappa_s$ - condutividade da fase sólida relativa à temperatura granular	$[kg m^{-1} s^{-1}]$
$\nu$ - razão entre as viscosidades da fase sólida e fase fluida	
$\delta$ - razão entre as massas específicas da fase fluida e sólida	
$\rho$ - massa específica	$[kg m^{-3}]$
$\mu$ - viscosidade dinâmica	$[kg m^{-1} s^{-1}]$
$\eta$ - viscosidade “bulk”	$[kg m^{-1} s^{-1}]$
$\lambda$ - razão entre a condutividade da fase sólida e viscosidade da fase fluida $\left( = \frac{\kappa_s}{\mu_f} \right)$	
$\beta$ - parâmetro de interação entre as fases	$[kg m^{-2} s^{-2}]$
$\Pi$ - tensor de superfície	$[N m^{-2}]$
$\Gamma$ - termo fonte, de dissipação ou termo fonte efetivo de energia	$[m^2 s^{-2}]$

$\theta$  - ângulo entre vetor número de onda e horizontal

$\tau$  - tensor de cisalhamento [N m<sup>-2</sup>]

$\tau_v$  - tempo de relaxação [s]

$\sigma$  - parâmetro temporal definido pela Eq. (3.76)

### ***Adimensionais***

$Re_T$  – número de Reynolds baseado na velocidade terminal  $\left( = \frac{\rho_f d_p V_T}{\mu_f} \right)$

$Re_R$  – número de Reynolds baseado na velocidade relativa  $\left( = \frac{\rho_f d_p |u - v|}{\mu_f} \right)$

$Re_R$  – número de Reynolds baseado na temperatura granular  $\left( = \frac{\rho_s T^{1/2} d_p}{\mu_f} \right)$

$St$  – número de Stokes  $\left( = \frac{\rho_s^2 d_p^3 g}{\mu_f^2} \right)$

### ***Sobrescrito***

\* - valor adimensional

' - referente à flutuação de velocidade

T – valor transposto

### ***Subscritos***

0 – referente ao estado básico

1 – referente ao estado perturbado

c – referentes aos coeficientes definidos em (3.106) e (3.107)

f – referente à fase fluida

s – referente à fase sólida

$\phi$  - derivada em relação a fração de sólidos no ponto  $\phi = \phi_0$

T – derivada em relação a temperatura granular no ponto  $\phi = \phi_0$

II – direção paralela a da gravidade

$\perp$  - direção perpendicular a da gravidade

m – referente a uma amplitude constante

mb – condição de mínimo borbulhamento

mf – condição de mínima fluidização

x,y,z – componentes nas direções x, y e z respectivamente

### ***Operadores***

$\nabla$  - operador nabla  $\left( = \frac{\partial}{\partial x}(\ )\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\ )\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\ )\mathbf{k} \right)$ , em coordenadas cartesianas

**Re** ( ) – parte real do termo entre parênteses

**Im** ( ) – parte imaginária do termo entre parênteses



# **Capítulo 1**

## **Introdução**

### **1.1 Introdução**

Seja o escoamento vertical e ascendente de um fluido através de um arranjo de partículas sólidas. Se uma corrente de fluido é injetada uniformemente na base desse leito de partículas, vários fenômenos ocorrerão. Assim, para uma vazão relativamente baixa de fluido, as partículas encontram-se em repouso. Nesta situação a queda de pressão do fluido através do arranjo é proporcional à sua vazão e a fração volumétrica de sólidos é constante. Posteriores aumentos de vazão são acompanhados por aumentos da força de arrasto sobre as partículas até ocorrer o balanceamento entre ela, o peso e o empuxo. Nesta situação, as partículas tornam-se livres para mover e o leito é dito minimamente fluidizado.

No estado fluidizado a mistura de fluido e partículas apresenta comportamento típico de um líquido, possuindo características favoráveis às transferências de calor e massa. Tais taxas de transferências são maiores que as encontradas em vários outros processos industriais envolvendo sólidos e fluídos (Kunii e Levenspiel, 1991). O uso da fluidização vem se diversificando e ampliando nas últimas décadas. Além das aplicações globalmente difundidas da fluidização como a combustão e gaseificação de materiais carbonosos e o craqueamento catalítico do petróleo, outras vêm sendo estudadas. Tais estudos concentram-se principalmente nos sistemas líquido-

sólido e gás-líquido-sólido, em aplicações tais como, hidrometalurgia, tecnologia de alimentos, indústria farmacêutica, tratamento de poluentes.

A partir da condição de mínima fluidização, subseqüentes aumentos da vazão do fluido através do leito são acompanhados pela:

- Expansão volumétrica do mesmo;
- Estabilidade da queda de pressão do fluido ao longo do leito inalterada.

Nesta situação, não existem garantias que as forças envolvidas promoverão uma distribuição homogênea de ambas as fases. Neste sentido, sistemas fluidizados são instáveis, exibindo uma tendência para as fases segregarem, em muitos casos quase completamente, formando regiões conhecidas como bolhas, com ausência de partículas. A formação de bolhas é, contudo, dependente da natureza do fluido, sendo mais provável para gases do que para líquidos. Isto será mostrado ao longo do presente trabalho.

Embora possuindo comportamento distinto para condições além da mínima fluidização, sistemas gás-sólido e líquido-sólido dão origem a um questionamento comum: Sob quais condições será obtida uma operação estável<sup>1</sup> do leito? Esta questão pode, também, ser formulada da seguinte forma: Sob quais condições essas variações levarão a turbulências que evoluirão para formação de bolhas<sup>2</sup>? Essa questão é fundamental do ponto de vista operacional uma vez que parâmetros importantes, tais como os coeficientes de troca de calor e massa, são afetados diretamente pelo regime fluido-dinâmico do leito.

O presente trabalho de doutorado propõe a tentar elucidar algumas das questões anteriores. Valendo-se de uma modelagem baseada na teoria cinética dos gases, será investigada teoricamente a estabilidade de leitos fluidizados. Tal estudo apresenta três importantes vantagens:

---

<sup>1</sup> O termo estabilidade refere-se à evolução temporal das variáveis características da fluidodinâmica do leito (fração de sólidos, velocidade do fluido, velocidade das partículas) após a imposição de distúrbios de pequena magnitude nas mesmas. O leito é considerado estável quando a amplitude de tais variáveis decresce com o tempo.

<sup>2</sup> Nos sistemas gás-sólido a transição até o aparecimento de bolhas exige muito menores distúrbios que em sistemas líquido-sólido.

- Uma melhor compreensão dos modelos teóricos de escoamento multifásico utilizados em leitos fluidizados.
- Novas explicações para o mecanismo de surgimento de turbulências e formação de bolhas em leitos fluidizados.
- Do ponto de vista tecnológico, um aprimoramento das previsões passíveis de serem feitas por programas de simulação de leitos fluidizados (de Souza-Santos, 1987, 1989, 1994a,b, 1997a,b,c, 1998, 1999) durante as condições reais de operação em regime transiente.

O presente trabalho é organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão da literatura sobre o assunto de estabilidade em fluidização. Inicia com um resumo dos principais trabalhos empregando a análise linear e os resultados experimentais. Em seguida, são discutidos os trabalhos que empregam uma análise não linear.

O Capítulo 3 mostra uma revisão dos tratamentos encontrados na literatura de análise linear de estabilidade em fluidização. São discutidas relações constitutivas para os termos de interação, viscosidade e pressão da fase sólida<sup>3</sup>, baseadas na fração volumétrica de sólidos. Por fim, é deduzida uma equação linear para a propagação de distúrbios em leitos fluidizados.

No Capítulo 4 são definidas a temperatura granular e sua equação de conservação. Em seguida é proposto um novo modelo para as relações constitutivas utilizadas nas equações de conservação. Finalizando, são discutidos dois modelos da literatura para as relações constitutivas.

No Capítulo 5 é apresentada a análise linear de estabilidade para condição não isotérmica.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados referentes às análises mostradas nos Capítulos 3 e 5.

---

<sup>3</sup> A viscosidade da fase sólida e pressão da fase sólida surgem na formulação da equação de quantidade de movimento para a fase sólida. Seus conceitos serão discutidos com maior detalhe ao longo do presente trabalho

Encerrando, no Capítulo 7 descreve-se as principais conclusões e discutem-se as perspectivas futuras de desenvolvimento.

## **Capítulo 2**

### **Revisão da Literatura**

#### **2.1 Primórdios - Os estudos lineares**

As primeiras tentativas de modelagem matemática e análise de estabilidade de leitos fluidizados surgiram durante a década de 60. Desta época destacam-se os trabalhos de Jackson (1963) e Murray (1965). Tais autores utilizaram as equações de meios contínuos na formulação das conservações de massa e quantidade de movimento para as fases presentes no leito. A principal simplificação introduzida em tais modelos refere-se à desconsideração do tensor associado à fase sólida em sua equação de quantidade de movimento. Em seguida aplicaram a técnica de análise linear para a propagação de pequenos distúrbios sobre um leito em fluidização uniforme. Os resultados de ambos os autores predisseram que um regime instável sempre ocorreria após a aplicação dos distúrbios.

Posteriormente, Anderson e Jackson (1968) refinaram o modelo de Jackson (1963) acrescentando o tensor associado à fase sólida particulada. A inclusão de tal tensor no modelo mostrou que sob certas condições o leito torna-se estável. Por outro lado, na situação instável o

distúrbio possui fator de crescimento da amplitude, frequência e comprimento de onda característicos<sup>4</sup>. Por fim, os fatores de crescimento de amplitude preditos para leitos fluidizados por gás foram superiores aos dos leitos fluidizados por líquido sob mesmas condições<sup>5</sup>, fato este em concordância com as evidências experimentais.

A comparação dos resultados experimentais com as predições da teoria de análise linear de estabilidade encontra-se apresentada em Anderson e Jackson (1969). Neste trabalho tais autores investigam a propagação de instabilidades em leitos fluidizados por líquido. As principais conclusões do trabalho experimental são:

- Para uma dada vazão acima da mínima fluidização, forma-se uma onda unidimensional com amplitude exponencialmente crescente a partir do distribuidor (base do leito). A frequência e comprimento da onda gerada também variam ao longo da altura do leito.
- A amplitude “satura”, i.e., atinge um valor limite a partir de uma certa cota medida acima do distribuidor. Entre outros parâmetros, este valor limite depende da vazão do fluido.
- Acima da cota de saturação de amplitude, surgem padrões de escoamento mais complexos, tais como turbulências e aparecimento de bolhas.

As comparações desses experimentos com as predições de Anderson e Jackson (1969) foram apenas qualitativamente satisfatórias. Tais concordâncias foram devidas às estimativas, ainda grosseiras, da ordem de grandeza de vários parâmetros do modelo desses. Uma das possíveis causas de discrepâncias quantitativas parece estar nas equações constitutivas do modelo.

---

<sup>4</sup> Como será detalhado no Capítulo 3, o distúrbio é representado por:  $A = A_m \exp(I \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \sigma t)$ , na qual  $\mathbf{k}$  é o vetor número de onda e as partes real e imaginária do fator temporal “ $\sigma$ ” definem o crescimento da amplitude e frequência do distúrbio.

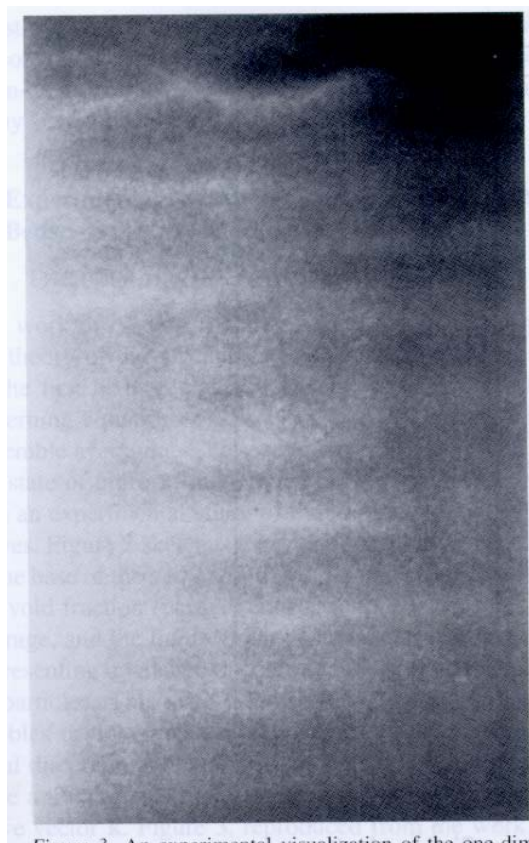
<sup>5</sup> i.e. mesma velocidade do fluido, densidade e diâmetro de partícula.

## 2.2 Evidências experimentais

Posteriormente, El-Kaissy e Homsy (1976) refizeram a montagem de Anderson e Jackson (1969) com o propósito de uma análise mais acurada dos dados experimentais. Uma comparação dos resultados experimentais com um modelo teórico similar ao de Anderson e Jackson encontra-se apresentado em Homsy e colaboradores (1980). Algum sucesso em reproduzir condições experimentais somente foi possível através de ajustes de parâmetros do modelo, tais como a pressão e viscosidade da fase particulada e do termo de interação entre as fases.

Liu (1982) desenvolveu uma classificação dos vários modelos existentes em termos de velocidades de propagação de ondas. Desse modo, conseguiu incluir também o modelo de Anderson e Jackson (1969) nessa classificação. A partir desse trabalho, Liu mostrou que a instabilidade, i.e., o crescimento da amplitude do distúrbio com o tempo, ocorre quando a velocidade das ondas excede um certo valor característico que depende de propriedades do leito.

Posterioros experimentos por Didwania e Homsy (1981a), em leito de maior área de seção transversal, evidenciaram de forma mais clara a dinâmica das instabilidades anteriormente observadas por El-Kaissy e Homsy (1976). Tais autores verificaram que após o crescimento e saturação das instabilidades unidimensionais observa-se a formação de estruturas bidimensionais de forma ondular. Tais estruturas bidimensionais apresentam comprimento de onda na direção horizontal maior ao do comprimento na direção vertical. Subseqüentes aumentos da vazão do fluido desfazem tal comportamento dando lugar a um regime turbulento. Por fim, para maiores vazões observa-se o surgimento de estruturas similares às bolhas observadas em sistemas fluidizados por gás. Os padrões de escoamento com os sucessivos aumentos das vazões do líquido encontram-se apresentados nas figuras a seguir.



**Figura 2.1 – Visualização experimental de ondas unidimensionais em um leito fluidizado por líquido (Didwania e Homsy, 1981a).**

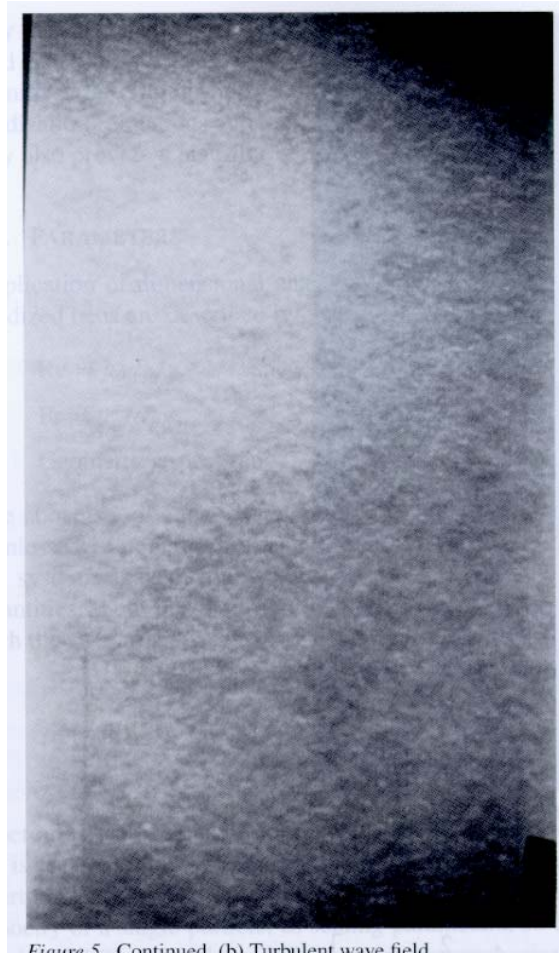
O primeiro padrão de escoamento encontra-se ilustrado na Figura 2.1. A porção inferior da foto é constituída de trens de onda unidimensionais. Tais ondas adquirem características bidimensionais na porção superior da foto, sugerindo a perda da estabilidade na direção horizontal.





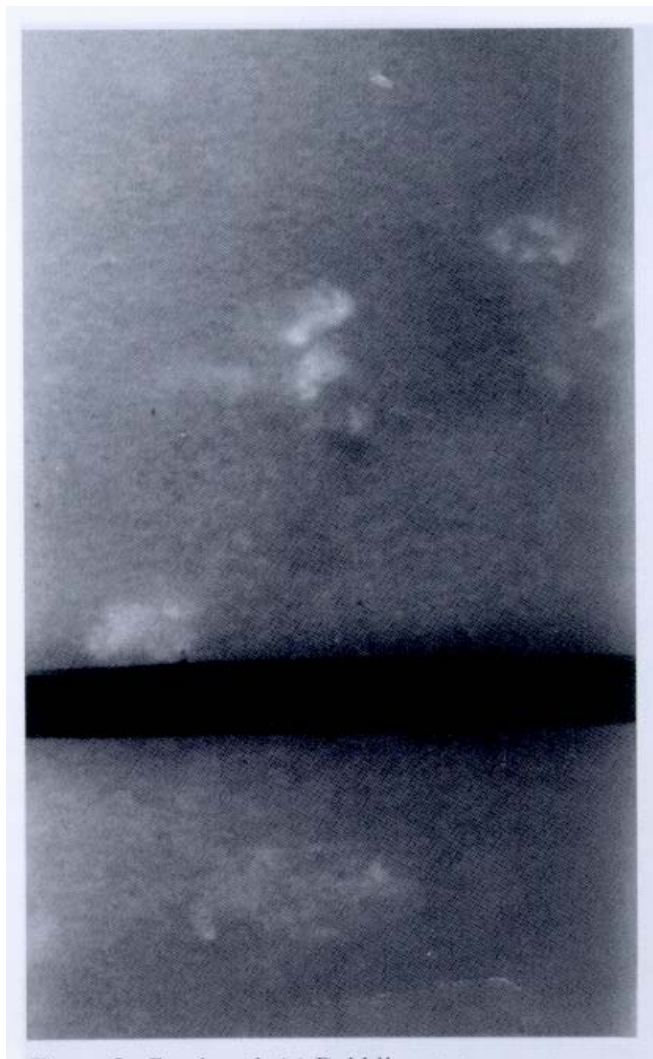
**Figura 2.2 – Visualização experimental das estruturas bidimensionais ondulares. (Didwania e Homsy, 1981a).**

A Figura 2.2 ilustra a situação que ocorre para um aumento subsequente da vazão. A estrutura bidimensional de forma ondular preenche todo o leito. Como descrito anteriormente, tais estruturas são típicas e apresentam comprimento de onda na direção horizontal maior que na direção vertical.



**Figura 2.3 – Visualização do regime turbulento (Didwania e Homsy, 1981a).**

O próximo regime é mostrado na Figura 2.3 onde se observa o desaparecimento do regime anterior de estruturas unidimensionais e bidimensionais. Este fenômeno deve-se ao surgimento da turbulência.



**Figura 2.4 – Formação de bolhas no regime turbulento, (Didwania e Homsy, 1981a).**

Para maiores vazões do fluido, além do regime turbulento, foram reportados os surgimentos espontâneos de estruturas similares a bolhas, conforme ilustrado na Figura 2.4.

Batchelor (1988) criticou a utilização excessiva de suposições nos modelos teóricos anteriores. Assim, propôs um novo modelo baseado no movimento das partículas. A partir desse e utilizando a técnica de análise linear, identificou os parâmetros relevantes para a estabilidade de um leito fluidizado para o caso de propagação de instabilidades unidimensionais. Em seu modelo a estabilidade é controlada pelo módulo de elasticidade da fase sólida. Tal termo é composto de

duas contribuições devidas a:

- a) Flutuações de velocidade (devido à turbulência) das partículas;
- b) Difusão efetiva das partículas, ou seja, tendência estatística de distribuição homogênea de concentração de partículas no volume do leito.

Contudo, deve ser ressaltado que à exceção de origens físicas diferentes, o módulo de elasticidade da fase sólida no modelo de Batchelor desempenha papel análogo à pressão e viscosidade da fase particulada do modelo de Anderson e Jackson (1968).

Ham e colaboradores (1990) ampliaram o conjunto de resultados experimentais existentes para incluir maiores diâmetros e densidades de partículas e viscosidades do fluido. Combinando as previsões teóricas dos modelos de Batchelor e Anderson e Jackson, tais autores concluem que a principal contribuição para a instabilidade de leitos fluidizados é devida às flutuações de velocidade das partículas.

Até o momento, as comparações entre os resultados teóricos e experimentais não permitem concluir sobre a superioridade de um determinado modelo em relação a outros.

## **2.3 Estudos não lineares**

Vários trabalhos foram desenvolvidos nos anos 80 e 90 visando explicar a complexa dinâmica da instabilidade em leitos fluidizados. Um dos primeiros foi o de Liu (1983) que empregou uma análise não linear “fraca”<sup>6</sup>. Seu desenvolvimento teórico fornece uma das primeiras explicações para o mecanismo de saturação da amplitude do distúrbio, observado experimentalmente por Didwania e Homsy (1981).

Em linha semelhante aos trabalhos de Liu (1982, 1983) situam-se os trabalhos de Needham e Merkin (1983, 1984, 1986) e Ganser e Drew (1990). Em seu primeiro trabalho, Needham e

---

<sup>6</sup> A terminologia fraca é empregada aqui para a análise onde são considerados somente os termos não lineares quadráticos na obtenção de equações descrevendo a propagação da instabilidade. Este aspecto ficará mais claro no Capítulo 3.

Merkin (1983) valem-se do método das múltiplas escalas para analisar uma equação diferencial linear similar à obtida por Anderson e Jackson (1968). Tal técnica permite identificar os limites de estabilidade marginal<sup>7</sup> em função de alguns parâmetros típicos. Em seguida deduzem um modelo que inclui termos não lineares. Seus resultados são os primeiros a sugerirem, que sob determinadas condições, de uma situação de instabilidade o leito pode retornar à estabilidade.

Em contraste com Liu (1983), Ganser e Drew (1990) concluem que, para sistemas fluidizados por gás, perturbações senoidais de pequena amplitude não permitem retorno à estabilidade. Cálculos posteriores ampliam o campo de aplicação dos resultados de Ganser e Drew para condições de perturbações com maiores amplitudes e menores comprimentos de ondas.

Posteriormente, Goz (1993) deu prosseguimento ao trabalho de Needham e Merkin (1983), fazendo uso da teoria da bifurcação e de análise no plano de fase<sup>8</sup>. Mostrando que uma bifurcação para ondas periódicas ocorre quando o estado básico de fluidização uniforme torna-se instável. O modelo de Goz permitiu identificar as instabilidades secundárias características do regime bidimensional observado experimentalmente. Mostrou ainda que uma instabilidade secundária é resultante da interação entre as instabilidades que se propagam nas direções vertical e horizontal, desde que essas tenham fatores de crescimento semelhantes.

Recentemente, Anderson et al (1995) e Glasser et al (1996) desenvolveram análises numéricas da estabilidade do sistema não linear completo formado pelas equações de conservação da massa e quantidade de movimento para ambas as fases sólidas e fluidas de um leito.

Empregando o método dos elementos finitos e restringindo-se a soluções periódicas espaciais, Anderson et al. (1995) tentaram explicar o processo que leva à formação de bolhas em leitos fluidizados. O estudo é limitado a dois casos com propriedades típicas de um sistema

---

<sup>7</sup> A situação marginal de estabilidade é dada pelo conjunto de parâmetros para os quais o fator de crescimento da amplitude da onda é nulo.

<sup>8</sup> A teoria da bifurcação e análise no plano de fase podem ser encontradas na literatura (e.g. Segel, 1980). Em síntese, o termo bifurcação refere-se a um dos possíveis estados que um sistema dinâmico pode assumir.

fluidizado por gás e de outro sistema fluidizado por líquido. Seus resultados, obtidos de análise unidimensional, reafirmaram o fato conhecido previamente de que as instabilidades unidimensionais podem saturar. Por outro lado, seus resultados obtidos a partir de uma análise bidimensional predisseram a formação de bolhas tanto para sistemas fluidizados por gás como por líquido, mesmo que submetidos a condições semelhantes. Isto contraria as observações experimentais.

Utilizando um tratamento mais simplificado que o de Goz (1993), Glasser et al. (1996) predizem o surgimento de instabilidades bidimensionais. Da mesma forma que Goz, tais autores verificaram a dependência da bifurcação da solução com as relações constitutivas assumidas para a viscosidade e pressão da fase particulada. Os resultados Glasser et al. (1996) permitem predizer a formação de bolhas a partir de instabilidades. Entretanto, seus resultados levaram às mesmas contradições em relação a experimentos que os de Anderson et al. (1995), quanto ao aspecto de formação de bolhas para sistemas fluidizados por gás ou por líquido.

Em linha distinta às descritas anteriormente, situam-se os trabalhos de Komatsu e Hayakawa (1993) e de Harris e Crighton (1994). Estes desenvolveram equações similares às obtidas em outros problemas de propagação de ondas não lineares (Whitham, 1974). Seus resultados sugeriram que a dinâmica de leitos fluidizados pode ser descrita pela solução da equação de Korteweg-de-Vries (Whitham, 1974).

Em síntese, os modelos não lineares permitem previsões razoáveis do aparecimento de instabilidades secundárias em leito fluidizados tanto por gás como por líquidos. Entretanto, levam a incoerências quanto ao aspecto de formação de bolhas em leitos fluidizados por líquidos.

## **2.4 A inclusão da temperatura granular**

A introdução do conceito de temperatura granular e sua inclusão na equação de conservação de quantidade de movimento aplicada a escoamento de materiais granulares iniciaram nos anos 80 (Savage e Jeffrey, 1981; Haff, 1983, Jenkins e Richman, 1986). Tais modelos vêm sendo empregados com sucesso ao longo das duas últimas décadas na descrição dos

escoamentos de suspensões particuladas “densas” através de canais e orifícios (Savage, 1998).

O uso do conceito de temperatura granular para o estudo da estabilidade de leitos fluidizados é relativamente recente (Buyevich, 1994; Buyevich e Kapbasov; Koch e Sangani, 1999, Didwania, 1999; Diwania e Costa, 2000).

Os trabalhos de Buyevich (1994) e Buyevich e Kapbasov (1994) são os primeiros a, sistematicamente, introduzirem o conceito de temperatura granular no conjunto formado pelas equações de conservação de massa e quantidade de movimento aplicadas ao caso de sistemas fluidizados.

Koch e Sangani (1999) investigaram o comportamento da pressão da fase particulada e dos limites marginais de estabilidade para leitos fluidizados por gás valendo-se de considerações da teoria cinética dos gases e de simulação numérica. Esse trabalho visa estender a aplicabilidade de resultados para sistemas diluídos obtidos em trabalho anterior (Koch, 1990).

O trabalho de Didwania (1999) é o primeiro que introduz a dependência da temperatura granular nas propriedades do leito e estuda propagação de instabilidade unidimensional vertical. Essas propagações são posteriormente investigadas por Didwania e Costa (2000).

Como será visto nos capítulos a seguir, o presente trabalho dá prosseguimento aos desenvolvimentos publicados até o momento.

## **Capítulo 3**

### **A análise isotérmica**

#### **3.1 Introdução – A modelagem de contínuo**

A avaliação da performance de leitos fluidizados usualmente requer uma descrição macroscópica dos campos de propriedades básicas do escoamento, tais como: pressão, fluxos de massa, concentrações volumétricas, velocidades e temperaturas das fases do sistema. Para tanto, o modelo de dois fluidos é usualmente utilizado.

O modelo de dois fluidos remonta à modelagem Euleriana de contínuo dada pela mecânica dos fluidos. Basicamente, sendo uma extensão para um sistema multifásico da formulação das equações de conservação de um sistema monofásico. Contudo, como em um dado instante nem a fase fluida e tampouco a particulada são contínuas em todo o sistema, um procedimento de formulação das equações de conservação para cada fase necessita ser estabelecido. Neste procedimento, as propriedades de transporte de cada fase bem como as interações entre diferentes fases são obtidas.

O procedimento de formulação das equações de conservação anteriores envolve a utilização de processos adequados de média. Tais médias dividem-se em dois grupos distintos: temporais e espaciais.

Os processos de média são tradicionalmente empregados na formulação das equações do contínuo para escoamentos bifásicos gás-líquido. Nesses, o sinal proveniente de um medidor é tratado visando a obtenção do tempo de residência da fase. Uma discussão em detalhe de tal



processo de média é dada em Delhay (1981).

Nos processos de média espacial é assumido que propriedades associadas a cada fase (tais como velocidade e tensores de superfície) são os valores correspondentes à média espacial, obtida em uma região larga em comparação ao tamanho da partícula sólida, mas pequena em relação às dimensões relevantes do escoamento (e.g., a distância entre as paredes do leito). Tal tipo de média tem sido tradicionalmente empregado para o estudo de sistemas fluidizados.

Ishii (1975), Drew e Lahey (1993), e Fan e Zhu (1998) descrevem os modelos sob a hipótese de comportamento contínuo utilizando médias temporais e espaciais aplicadas às fases para obtenção das equações de conservação.

No presente trabalho se partirá da formulação genérica proposta por Anderson e Jackson (1968). Tais autores formulam as equações para sistemas fluidizados aplicando a média espacial às equações de conservação multiplicadas por uma função ponderadora. Na Seção 3.2 apresenta-se o conjunto básico formado pelas equações de conservação da massa e quantidade de movimento. Em seguida, na Seção 3.3, discute-se a formulação para os tensores de deformação para ambas as fases. A Seção 3.4 trata da formulação do termo de interação entre as fases. A adimensionalização das equações é discutida na Seção 3.6. As Seções 3.7 e 3.8 tratam da análise linear de estabilidade e obtém-se o conjunto de equações diferenciais parciais lineares que descrevem a propagação de distúrbios de pequena magnitude. As características de propagação de tais distúrbios são discutidas na Seção 3.9. Finalizando o capítulo, o critério de estabilidade baseado em uma hierarquia de ondas é formulado.

## 3.2 Equações básicas

As equações de conservação da massa para as fases fluida e sólida são descritas em Anderson e Jackson (1968) como:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-\phi)\mathbf{u}] = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot [\phi \mathbf{v}] = 0 \quad (3.2)$$

Nas equações anteriores admite-se a incompressibilidade das fases e ausência de troca de massa entre as mesmas.

Conforme tais autores, as equações de conservação da quantidade de movimento das fases fluida e sólida são dadas por:

$$\rho_f (1 - \phi) \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot \Pi_f - \hat{\mathbf{F}} + (1 - \phi) \rho_f \mathbf{g} \quad (3.3)$$

$$\rho_s \phi \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \Pi_s + \hat{\mathbf{F}} + \phi \rho_s \mathbf{g} \quad (3.4)$$

Os termos do lado esquerdo das Equações (3.3) e (3.4) representam as forças inerciais atuando sobre a fase fluida e a fase sólida, respectivamente. Os termos “ $\nabla \cdot \Pi_f$ ” e “ $\nabla \cdot \Pi_s$ ” representam as ações dos tensores de superfície sobre as fases. O termo “ $\hat{\mathbf{F}}$ ” representa a força de interação entre as fases. Por fim, os últimos termos das Equações (3.3) e (3.4) representam a força de gravidade atuante sobre as fases.

### 3.3 Os tensores de superfície

Para a fase fluida é razoável admitir que o tensor de superfície seja dependente da taxa de deformação de forma similar a de um fluido Newtoniano.

Desta forma, tem-se, para a fase fluida:

$$\Pi_f = -p_f \mathbf{I} + \tau_f \quad (3.5)$$

Onde o componente “ $\tau_f$ ”, é dado por:

$$\tau_f = \mu_f \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] + \left( \eta_f - \frac{2}{3} \mu_f \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \quad (3.6)$$

Ainda, para propriedades constantes, tem-se:

$$\nabla \cdot \Pi_f = -\nabla p_f + \mu_f \nabla^2 \mathbf{u} + \left( \eta_f + \frac{1}{3} \mu_f \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (3.7)$$

Conforme discutido em Bird (1960), a viscosidade bulk “ $\eta_f$ ” pode ser negligenciada para gases densos e líquidos. Tal hipótese será também adotada para a fase fluida em um sistema fluidizado.

Um dos aspectos controversos das equações médias para sistemas fluidizados refere-se à identificação do tensor para a fase sólida. O caso de uma suspensão diluída de esferas é conceitualmente simples, pois a resistência à ação cisalhante pode ser dada pelo gradiente de quantidade de movimento e não pela tensão dentro de cada partícula multiplicada pela fração volumétrica da fase sólida. Entretanto, para uma suspensão densa de partículas a viscosidade é predominantemente relacionada às interações entre partículas. Entre os dois extremos não existe uma formulação universalmente aceita. Uma das alternativas consiste em admitir que a fase sólida comporta-se como um fluido Newtoniano, resultando:

$$\Pi_s = -p_s \mathbf{I} + \tau_s \quad (3.8)$$

$$\tau_s = \mu_s \left[ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] + \left( \eta_s - \frac{2}{3} \mu_s \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \Pi_s = -\nabla p_s + \mu_s \nabla^2 v + \left( \eta_s + \frac{1}{3} \mu_s \right) \nabla (\nabla \cdot v) \quad (3.10)$$

A aproximação anterior fundamenta-se na possibilidade de aplicação do conhecimento já existente sobre escoamento de fluidos Newtonianos monofásicos. Por outro lado, a avaliação das propriedades  $\mu_s$ ,  $\eta_s$  e  $p_s$  é controversa. De forma similar ao caso do fluido, será admitido que a fase sólida é incompressível e, portanto o último termo (ou divergente de velocidade) na Eq. (3.9) é desprezível. Nas próximas seções serão discutidas as formulações apresentadas na literatura para a pressão e viscosidade referentes à fase sólida particulada.

### 3.3.1 A pressão da fase sólida

Nas abordagens comumente empregadas da literatura, a origem de “ $p_s$ ” é atribuída às colisões entre as partículas e relacionada com a fração volumétrica de sólidos. A seguir serão apresentadas correlações que a consideram somente dependente da fração de sólidos.

As duas correlações a seguir são usadas por Glasser e colaboradores (1996):

$$p_s = C_1 \phi^3 \exp \left[ \frac{0.3 \phi}{\phi_m - \phi} \right] \quad (3.11)$$

$$\phi_m = 0.65$$

e

$$p_s = C_2 \frac{\phi^{m_1}}{(\phi_m - \phi)^{m_2}} \quad (3.12)$$

Deve ser observado que nas equações anteriores, os parâmetros  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $r$  e “ $\phi_m$ ” são ajustados de modo que a pressão assuma valores elevados para frações de sólidos próximas ao máximo empacotamento.

Por outro lado, em vários trabalhos, “ $p_s$ ” encontra-se formulado indiretamente através de

sua relação com o módulo de elasticidade da fase sólida “E<sub>s</sub>”, definido por:

$$E_s = \frac{\partial p_s}{\partial \phi} \quad (3.13)$$

Formulações para “E<sub>s</sub>” em condições acima da de mínima fluidização e em mínimo borbulhamento são apresentadas por Verloop e Heertjes (1970), Foscolo e Gibilaro (1984), Mutsers e Rietema (1977) e Batchelor (1988).

Conforme Verloop e Heertjes (1970), para um leito acima da mínima fluidização:

$$E_s = 66.7 d_p g (\rho_s - \rho_f) \left( \left( \frac{1 - \phi_{mf}}{1 - \phi} \right)^3 \frac{\phi}{\phi_{mf}} \right)^a \quad (3.14)$$

$$a = 1, \quad \text{Re}_T < 2$$

$$a = 1.4, \quad 2 < \text{Re}_T < 500$$

$$\text{Re}_T = \frac{\rho_f V_T d_p}{\mu_f}$$

(3.15a, b, c)

Mutsers e Rietema (1977), propuseram:

$$E_s = \frac{\mu_f^2}{\rho_s (\rho_s - \rho_f)^2 g^2 d_p^4} \left[ \frac{150 \phi_{mb}}{(1 - \phi_{mb})^3 (1 + 2 \phi_{mb})} \right]^2 \quad (3.16)$$

Foscolo e Gibilaro (1984), propuseram:

$$E_s = 3.2 g d_p \phi (\rho_s - \rho_f) \quad (3.17)$$

Batchelor (1988), obteve:

$$E_s = \left\{ \left[ W(1 + \Theta) + \frac{1}{2} \zeta u_{mb} \right]^2 - \left( \frac{1}{2} \zeta u_{mb} \right)^2 \right\} \frac{\rho_s}{1 + \Theta} \quad (3.18)$$

Onde:

$$\begin{aligned} W &= -nv_t(1-\phi_{mb})^{n-1}\phi_{mb} \\ \Theta &= \frac{1+2\phi_{mb}}{2(1-\phi_{mb})} \frac{\rho_f}{\rho_s} \\ \zeta &= \frac{3\phi_{mb}}{4(1-\phi_{mb})^2} \frac{\rho_f}{\rho_s} \end{aligned} \quad (3.19a,b,c)$$

Uma comparação, feita por Polleto e Massimila (1992), entre os valores previstos pelas Equações (3.14) a (3.18) indicou boa concordância entre as formulações (3.15) e (3.17).

Recentemente Rietema e Piepers (1990), baseados em determinações experimentais, propuseram:

$$E_s = E_{s0} e^{-b(\phi_0 - \phi)} \quad (3.20)$$

onde  $E_{s0}$ ,  $b$ ,  $\varepsilon_0$  são parâmetros ajustáveis às diversas condições experimentais.

Deve ser ressaltado que as formulações restringem-se à faixa de condições experimentais utilizadas.

### 3.3.2 A viscosidade da fase sólida

Da mesma forma que ocorre para o termo “ $p_s$ ”, existem diversas formulações para a viscosidade da fase sólida dispersa “ $\mu_s$ ”.

Embora a origem da viscosidade “ $\mu_s$ ” seja alvo de controvérsias, a estimativa da viscosidade aparente de leitos fluidizados, empregando técnicas diversas, encontra-se reportada em alguns trabalhos empíricos e semi-empíricos (Grace, 1970; Saxton et al, 1970; Schurgel, 1971; Kai et al, 1990). Excetuando o trabalho de Kai (1990); os valores reportados para “ $\mu_s$ ” são da mesma ordem de magnitude.

Glasser et al (1996) sugeriram a seguinte formulação:

$$\mu_s = \frac{A\phi}{1 - \left(\frac{\phi}{0.65}\right)^{1/3}} \quad (3.21)$$

Onde A é um parâmetro ajustável.

Deve ser ressaltado que ambas as formulações adotadas para a pressão e viscosidades da fase sólida serão revistas à luz dos conceitos da teoria cinética para materiais granulares e apresentada no Capítulo 4.

### 3.4 O termo de interação entre as fases

Nesta seção será discutida outra importante relação constitutiva para o modelo. Trata-se do termo de interação entre as fases. Inicialmente nas Seções 3.4.1 e 3.4.2 será apresentado um breve resumo referente às forças atuantes em uma partícula isolada e imersa em um fluido. Em seguida, tendo como base o tratamento para uma partícula isolada, o termo de interação será formulado na Seção 3.4.3.

#### 3.4.1 A dinâmica de uma partícula sólida imersa em um fluido: Velocidade relativa constante

O estudo das forças atuantes em uma partícula sólida isolada e imersa em um fluido fornece informações importantes referentes ao termo de interação entre as fases.

Para uma velocidade relativa “ $u - v$ ” constante, a aplicação da 2ª lei de Newton para o movimento de uma partícula esférica imersa em um fluido fornece<sup>9</sup>:

$$\rho_p v_p \frac{dv}{dt} = C_D \frac{1}{2} \rho_f (u - v) |u - v| A_p = F_D \quad (3.22)$$

---

<sup>9</sup> Deve ser observado que, na equação anterior encontram-se desprezados os efeitos gravitacionais, i.e., as forças peso e empuxo.

onde “ $C_D$ ” é função do número de Reynolds definido por  $\mathbf{Re}_R = \frac{\rho_f d_p |u - v|}{\mu_f}$ .

Para baixos valores do número de Reynolds ( $Re_R < 1$ ), o valor da força de arraste é obtida analiticamente, sendo dado por:

$$F_D = 3\pi\mu_f d_p |u - v| \quad (3.23)$$

Inserindo (3.23) em (3.22), obtém-se:

$$C_D = \frac{24}{Re_R} \quad (3.24)$$

Para valores maiores do número de Reynolds, correlações empíricas encontram-se apresentadas na literatura (e.g. Briens, 1991). Uma formulação conveniente ( $Re_R < 10^7$ ) é dada por:

$$C_D = \left( \frac{24}{Re_R} \right) f(Re_R) = \left( \frac{24}{Re_R} \right) \left( 1 + \frac{1}{6} Re_R^{2/3} \right) \quad (3.25)$$

Introduzindo-se (3.25) em (3.22) e considerando-se a partícula esférica, obtém-se:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} f(Re_R) (u - v) \quad (3.26)$$

A velocidade terminal de partícula é obtida quando a resultante das forças atuantes sobre a mesma fornece aceleração nula. Neste caso o balanço de forças fornece:

$$\text{peso} - \text{empuxo} = \text{arraste} \quad (3.27)$$

Usando a definição de “ $F_D$ ” dada por (3.22) e admitindo-se “ $u - v > 0$ ”, a equação anterior torna-se:

$$m_p g - v_p \rho_f g = \frac{1}{2} \rho_f v_t^2 C_D A \quad (3.28)$$



Onde “ $v_t$ ” representa a velocidade terminal de partícula.

Para uma esfera o balanço anterior, fornece:

$$v_t = \left[ \frac{4 (\rho_s - \rho_f) g d_p}{3 \rho_f C_D} \right]^{1/2} \quad (3.29)$$

Para baixos números de Reynolds, a velocidade anterior foi calculada analiticamente sendo dada por:

$$v_t = \frac{(\rho_s - \rho_f) g d_p^2}{18 \mu_f} \quad (3.30)$$

Outro parâmetro importante “ $\tau_v$ ”, conhecido como tempo de relaxação, é obtido ao integrar-se a Equação (3.26) para baixo valores do número de Reynolds. Assim:

$$v = u(1 - e^{-t/\tau_v}) \quad (3.31)$$

“ $\tau_v$ ” é uma medida da tendência da velocidade da partícula alcançar uma velocidade de equilíbrio com o fluido, i.e., da velocidade relativa tornar-se constante.

Para exemplificar, apresentam-se valores de “ $\tau_v$ ” para as seguintes situações particulares de fluidização<sup>10</sup>:

1. Uma partícula de areia ( $\rho_s = 2600 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $d_p = 200 \mu\text{m}$ ) imersa no ar a 25 C leva a

$$\tau_v = \frac{\rho_s d_p^2}{18 \mu_f} = \frac{2600 \cdot (200 \cdot 10^{-6})^2}{18 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} \cong 0.3 \text{ s} \quad (3.32)$$

2. A mesma partícula imersa em água a 25 C leva a
- 

<sup>10</sup> Assumindo escoamento laminar do fluido em torno da partícula

$$\tau_v = \frac{\rho_s d_p^2}{18\mu_f} = \frac{2600 \cdot (200 \cdot 10^{-6})^2}{18 \cdot 9 \cdot 10^{-4}} \cong 6 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (3.33)$$

Esses dois exemplos [(3.32) e (3.33)] mostram que tanto para a partícula imersa em gás como em líquido, o período de tempo na qual a velocidade relativa varia é extremamente curto.

### 3.4.2 Aceleração relativa não nula

Para a situação em que existe uma aceleração relativa entre as fases. A 2ª lei de Newton para o movimento de uma partícula isolada toma a forma (Maxey e Riley, 1983):

$$\begin{aligned} \rho_p v_p \frac{dv}{dt} = & 3\pi d_p \mu_f (u - v) - v_p \frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{1}{2} v_p \rho_f \frac{d(u - v)}{dt} \\ & + \frac{3}{2} d_p^2 \sqrt{\pi d_p \mu_f} \int_{t_0}^t \frac{d(u - v)/dt}{\sqrt{t - t'}} dt' + F_{\text{externas}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Onde:

A 1ª parcela do lado direito representa o arraste na faixa de Stokes ( $Re_R < 1$ ).

A 2ª parcela representa a força devido ao gradiente de pressão do escoamento do fluido em torno da partícula.

A 3ª parcela é denominada de termo de massa virtual. Tal termo pode ser interpretado como o efeito de um acréscimo de massa a partícula. Sua origem é atribuída à resistência ao movimento oferecido pelo fluido adjacente à partícula quando a mesma é submetida à aceleração.

A 4ª parcela é denominada de termo de Basset, sendo deduzida pelo mesmo (Basset, 1888). Tal termo é originado pela variação temporal do escoamento do fluido em torno da partícula. A força é análoga à experimentada por uma placa plana imersa em um fluido em

repouso e submetida a um impulso.

A 5ª parcela representa a ação de campos externos, como por exemplo, a gravidade.

Embora a resolução da Eq. (3.34) não seja tarefa trivial, uma estimativa da ordem de grandeza das parcelas anteriores pode ser feita.

Para um escoamento gás-sólido típico, a razão de densidades “ $\frac{\rho_f}{\rho_s}$ ” é da ordem de  $10^{-3}$ .

Assim sendo, o termo de massa virtual é desprezível em comparação com os demais termos. Entretanto, para escoamentos líquido-sólido tal termo é significativo.

Para o caso de gases, o gradiente de pressão do escoamento do fluido pode ser aproximado por:

$$-\frac{\partial p_f}{\partial x} = \rho_f \frac{Du}{Dt} \quad (3.35)$$

A ordem de grandeza do termo de Basset pode ser estimada considerando um escoamento no qual a velocidade relativa é proporcional ao tempo desde o início do movimento da partícula. Neste caso, a aceleração relativa torna-se uma constante, e a integral relativa ao termo de Basset pode ser avaliada. A forma da razão entre o termo de Basset e o termo de Stokes é dada por:

$$\frac{\text{Basset}}{\text{Stokes}} = \left[ \frac{18}{\pi} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_s} \cdot \frac{\tau_v}{t} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

Portanto para valores típicos da razão de densidades “ $\frac{\rho_f}{\rho_s} \cong 10^{-3}$ ”, a força de Basset torna-

se 10% do arraste no regime de Stokes para tempos maiores que  $\frac{1}{2} \tau_v$ .

Conforme visto na seção anterior, usualmente “ $\tau_v < 1\text{ s}$ ”. Isto justifica negligenciar-se o termo de Basset.

Do exposto nesta seção conclui-se que, na maioria das condições práticas, as Equações (3.22) e (3.26) são razoáveis para descrever as forças atuantes sobre uma partícula isolada imersa em um escoamento. Entretanto, não se aplicam em condições extremas, tais como altas pressões, partículas de baixa densidade e tempos menores que  $\tau_v$  (Fan e Zhu, 1998).

Além das forças discutidas anteriormente outras podem atuar. No presente caso admite-se também que as partículas não possuem rotação. Assim, as forças de sustentação (lift) encontram-se suprimidas. Da mesma forma, forças de ação a curta distância tais como: forças de van der Waals e eletrostáticas são negligenciadas.

### 3.4.3 Formulação proposta para o termo de interação

Valendo-se da modelagem para uma partícula isolada e discutida na seção anterior é aqui proposta uma formulação para o termo de interação entre as fases. O ponto de partida será a seguinte expressão formulada por Anderson e Jackson (1968):

$$\hat{F} = \phi \nabla \cdot \Pi_f + \bar{F} \quad (3.37)$$

onde, a primeira parcela do lado direito representa a ação do gradiente de pressão e do campo de escoamento do fluido sobre a partícula. Na segunda parcela da Eq. (3.37) está incluído o efeito do movimento relativo entre as fases. Este último efeito é indicado por um termo proporcional à velocidade relativa entre as fases e outro termo proporcional a aceleração relativa, ou seja:

$$\bar{F} = (1 - \phi)\beta(\phi)(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \phi C(\phi)\rho_f \frac{d}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (3.38)$$

Como será visto na Seção 3.7, uma expressão para “ $\beta$ ” será obtida a partir das equações de conservação da quantidade de movimento para o estado uniforme<sup>11</sup>. O 2º termo do lado direito

---

<sup>11</sup> Na Equação 3.38 é implicitamente considerada a validade do regime laminar na dependência da velocidade

de (3.38) representa o efeito da força de massa virtual e que foi discutido na seção anterior. Por simplicidade, será admitido que o coeficiente “C” assumo o mesmo valor que o obtido para uma partícula esférica isolada (0.5). Na Equação (3.39) encontra-se definida a aceleração relativa entre as fases e conforme Anderson e Jackson (1968) pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \quad (3.39)$$

A inserção da Equação (3.37) na equação de conservação da quantidade de movimento para a fase fluida resulta:

$$\rho_f (1 - \phi) \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = (1 - \phi) \nabla \cdot \Pi_f - \bar{F} + (1 - \phi) \rho_f \mathbf{g} \quad (3.40)$$

E para a equação de conservação da quantidade de movimento para a fase sólida, tem-se:

$$\rho_s \phi \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \Pi_s + \bar{F} + \phi \rho_s \mathbf{g} + \phi \nabla \cdot \Pi_f \quad (3.41)$$

Por outro lado, da Eq. (3.40) pode-se escrever:

$$\nabla \cdot \Pi_f = \rho_f \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] + \frac{\bar{F}}{1 - \phi} - \rho_f \mathbf{g} \quad (3.42)$$

Inserindo a Eq. (3.42) na Eq. (3.41) resulta:

$$\rho_s \phi \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \Pi_s + \frac{\bar{F}}{1 - \phi} + \phi (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} + \phi \rho_f \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \quad (3.43)$$

---

relativa “ $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ”, de modo que é considerada “ $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ”. Caso fosse considerada a hipótese do regime turbulento tal dependência da velocidade relativa entre as fases seria quadrática, i.e., dependente de  $(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2$

Nas próximas seções, as Equações de conservação (3.40) e (3.43) serão usadas juntamente com as Equações (3.1) e (3.2).

### 3.5 Adimensionalização

As equações anteriores serão adimensionalizadas utilizando-se:

- O diâmetro de partícula “ $d_p$ ” como comprimento característico;
- “ $\sqrt{gd_p}$ ” como velocidade característica, onde “ $g$ ” é a aceleração de gravidade;
- “ $\sqrt{\frac{d_p}{g}}$ ” como tempo característico.

Como será visto a escolha de tais escalas permite a obtenção do menor número de parâmetros adimensionais.

Desta forma os comprimentos, tempo e velocidades adimensionais são dados por:

$$x^* = \frac{x}{d_p} ; y^* = \frac{y}{d_p} ; z^* = \frac{z}{d_p} \quad (3.44)$$

$$t^* = g^{1/2} d_p^{-1/2} t \quad (3.45)$$

$$\mathbf{v}^* = g^{-1/2} d_p^{-1/2} \mathbf{v} ; \mathbf{u}^* = g^{-1/2} d_p^{-1/2} \mathbf{u} ; \quad (3.46)$$

Além disso, as demais variáveis serão adimensionalizadas por:

$$\beta^* = \frac{\beta d_p^2}{\mu_f} ; \mathbf{p}_s^* = \frac{p_s}{\rho_s g d_p} ; \mathbf{p}_f^* = \frac{p_f}{\rho_f g d_p} \quad (3.47)$$

Deste modo, o sistema formado pelas equações (3.1), (3.2), (3.40) e (3.43), torna-se:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot [(1-\phi)\mathbf{u}^*] = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot [\phi \mathbf{v}^*] = 0 \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \delta(1-\phi) \left[ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right] &= (1-\phi) \left( -\nabla^* p_f^* + St^{-1/2} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \right) \\ &\quad - St^{-1/2} (1-\phi) \beta^* (\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*) - \phi C \delta \frac{d(\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*)}{dt^*} - (1-\phi) \delta \mathbf{i} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \phi \left[ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* \right] &= -\nabla^* p_s^* + \nu St^{-1/2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \phi \delta \left[ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right] \\ &\quad + St^{-1/2} \beta^* (\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*) + \frac{\phi}{1-\phi} C \delta \frac{d(\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*)}{dt^*} - \phi(1-\delta) \mathbf{i} \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde

$$\delta = \frac{\rho_f}{\rho_s} \quad (3.52)$$

$$\nu = \frac{\mu_s}{\mu_f} \quad (3.53)$$

$$St = \frac{\rho_s^2 d_p^3 g}{\mu_f^2} \quad (3.54)$$

### 3.6 A análise linear de estabilidade – O estado básico

O primeiro passo da análise linear de estabilidade consiste na definição do estado básico, cuja estabilidade será investigada. Uma vez definido procede-se a obtenção das equações de conservação correspondentes a tal estado.

Dentre os possíveis candidatos, será escolhido o seguinte conjunto de soluções, definindo o estado básico:

$$\mathbf{u}^* = u_0^* \mathbf{i}$$



$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0^* = \mathbf{0}$$

$$\phi = \phi_0$$

$$p_f^* = p_{f0}^*(\mathbf{x}^*) \quad (3.55a, b, c, d)$$

O vetor unitário “ $\mathbf{i}$ ” é vertical e positivo no sentido ascendente. “ $\mathbf{x}^*$ ” é o vetor posição em coordenadas cartesianas. Os valores “ $u_0, \phi_0$ ” são constantes. O conjunto anterior corresponde a um leito em fluidização uniforme, onde o fluido percola através do arranjo de partículas cuja velocidade média é nula.

As Equações (3.55) satisfazem identicamente as Equações de continuidade (3.1) e (3.2). Por outro lado, sua substituição na equação de quantidade de movimento para a fase fluida (Eq. 3.50), resulta:

$$0 = -(1 - \phi_0) \nabla^* p_{f0}^* - St^{-1/2} (1 - \phi_0) \beta_0^* u_0^* - (1 - \phi_0) \delta \mathbf{i} \quad (3.56)$$

A substituição das equações (3.55) na equação de conservação da quantidade de movimento para a fase sólida (Eq. 3.51), resulta:

$$0 = -\phi_0 \nabla^* p_{f0}^* + St^{-1/2} (1 - \phi) \beta_0^* u_0^* - \phi_0 \mathbf{i} \quad (3.57)$$

Deve-se observar que o conjunto formado pelas equações (3.56) e (3.57) permite a obtenção de uma equação para o coeficiente de interação “ $\beta$ ” entre as fases:

$$\beta_0^* = \frac{\phi_0 (1 - \delta)}{St^{-1/2} u_0^*} \quad (3.58)$$

Utilizando os resultados do clássico trabalho de Richardson e Zaki (1954) a velocidade intersticial “ $u_0^*$ ” pode ser relacionada com a fração de sólidos como:

$$u_0 = v_t (1 - \phi_0)^{n-1} \quad (3.59)$$

Maiores detalhes podem ser encontrados no Apêndice A. Aqui, o expoente “n” é obtido experimentalmente e “ $v_t$ ” é a velocidade terminal no regime de Stokes e é dada por:

$$v_t = \frac{(\rho_s - \rho_f)gd_p^2}{18\mu_f} \quad (3.60)$$

Reunindo os resultados anteriores tem-se:

$$u_0^* = \frac{1}{18}(1-\delta)St^{1/2}(1-\phi)^{n-1} \quad (3.61)$$

$$\beta_0^* = 18\phi_0(1-\phi_0)^{-(n-1)} \quad (3.62)$$

As Equações (3.56) e (3.57) serão usadas na próxima seção para obter as equações referentes ao estado perturbado.

### 3.7 Introdução das perturbações

O segundo passo da análise linear de estabilidade consiste na imposição de perturbações ao estado básico.

As soluções referentes a tal imposição são dadas por:

$$u^* = u_0^* + u_1$$

$$v^* = v_0^* + v_1$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1$$

$$p_f = p_{f0}^* + p_{f1} \quad (3.63a, b, c, d)$$

As funções  $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \phi_1, p_{f1}$  são admitidas de pequena magnitude em relação às funções referentes ao estado não perturbado, de modo que todos os termos de ordem quadráticas e superiores são negligenciados.

A substituição de (3.63), na equação da continuidade para fase fluida (Eq. 3.48), produz:

$$-\frac{\partial(\phi_0 + \phi_1)}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (1 - \phi_0 - \phi_1) [\mathbf{u}_0^* \mathbf{i} + \mathbf{u}_1] = 0 \quad (3.64)$$

Expandindo a equação anterior:

$$-\frac{\partial \phi_0}{\partial t^*} - \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} - \nabla^* \cdot (\phi_0 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i}) - \nabla^* \cdot (\phi_0 \mathbf{u}_1) - \nabla^* \cdot (\phi_1 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i}) - \nabla^* \cdot (\phi_1 \mathbf{u}_1) = 0 \quad (3.65)$$

Por outro lado, observa-se que:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t^*} = 0 \quad (\phi_0 = \text{constante})$$

$$\nabla^* \cdot (\phi_0 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i}) = 0 \quad (\phi_0 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i} = \text{constante})$$

$$\nabla^* \cdot (\phi_1 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i}) = \mathbf{u}_0^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*}$$

$$\nabla^* \cdot (\phi_1 \mathbf{u}_1) \text{ é desprezível}$$

Assim, a Equação (3.64) resulta em:

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + (1 - \phi_0) \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} = 0 \quad (3.66)$$

Similarmente, a substituição de (3.63) na equação da continuidade para a fase sólida (3.49), produz:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + \phi_0 \nabla^* \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (3.67)$$

A substituição das Equações (3.63) na equação de conservação de quantidade de movimento para a fase fluida (3.50), juntamente com o uso da respectiva equação correspondente ao estado básico (3.56), resulta:

$$\begin{aligned} (1-\phi_0) \delta \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t^*} + \mathbf{u}_0^* \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}^*} \right) = \\ - (1-\phi_0) \nabla^* p_{f1}^* + \frac{(1-\phi_0)}{St^{1/2}} \nabla^{2*} \mathbf{u}_1 \\ - (1-\phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) - (1-\phi_0) \frac{\beta_\phi^*}{St^{1/2}} \phi_1 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i} - C \delta \phi_0 \frac{\partial}{\partial t^*} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) - C \delta \phi_0 \mathbf{u}_0^* \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}^*} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Na equação anterior considerou-se:

$$C(\phi_0 + \phi_1) \cong C(\phi_0) = C \quad (3.69)$$

$$\beta^*(\phi_0 + \phi_1) \cong \beta_0^* + \left. \frac{d\beta}{d\phi} \right|_{\phi_0} \phi_1 = \beta_0^* + \beta_\phi^* \phi_1 \quad (3.70)$$

A substituição das Equações (3.63) na Equação de conservação de quantidade de movimento para a fase sólida (Eq. 3.51), juntamente com o uso da Equação (3.57), resulta:

$$\begin{aligned}
& \phi_0 \left[ 1 + \frac{1}{1 - \phi_0} C \delta \right] \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t^*} - \delta \phi_0 \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t^*} + \mathbf{u}_0^* \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}^*} \right] \\
& = -p_{s\phi}^* \nabla \phi_1 + \nu St^{-1/2} \nabla^2 \mathbf{v}_1 + \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + \frac{\beta_\phi^*}{St^{1/2}} \phi_1 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i} - \phi_1 (1 - \delta) \mathbf{i}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Na equação anterior:

$$\nu(\phi_0 + \phi_1) = \nu(\phi_0) = \nu \tag{3.72}$$

$$p_s(\phi_0 + \phi_1) = p_{s0} + \left. \frac{dp_s}{d\phi} \right|_{\phi_0} \phi_1 = p_{s0} + p_{s\phi}^* \phi_1 \tag{3.73}$$

### 3.8 Predições teóricas do fator de crescimento e frequência da instabilidade

A forma das funções de perturbação definidas em (3.63) são ondas dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(\mathbf{I} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^*) \\
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(\mathbf{I} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^*) \\
\phi_1 &= \phi_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(\mathbf{I} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^*) \\
p_{f1} &= p_{f1m} \exp(\sigma t^*) \exp(\mathbf{I} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^*)
\end{aligned} \tag{3.74a, b, c, d}$$

onde:

$$\mathbf{u}_{1m} = u_{1x} \mathbf{i} + u_{1y} \mathbf{j} + u_{1z} \mathbf{w}$$

$$\mathbf{v}_{1m} = v_{1x} \mathbf{i} + v_{1y} \mathbf{j} + v_{1z} \mathbf{w}$$

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{w}$$

$$\mathbf{x}^* = x^* \mathbf{i} + y^* \mathbf{j} + z^* \mathbf{w}$$

$\phi_{1m}, p_{flm}$  são constantes reais

$$I = \sqrt{-1} \quad (3.75a, b, c, d, e, f)$$

O parâmetro temporal  $\sigma$  é um número complexo definido por:

$$\sigma = \sigma_r + I \sigma_i \quad (3.76)$$

Sua parte real “ $\sigma_r$ ” define o fator de crescimento da amplitude do distúrbio. “ $\sigma_r < 0$ ” indica que a amplitude do distúrbio decai com o tempo (estabilidade) e crescimento da amplitude do distúrbio (instabilidade) caso “ $\sigma_r > 0$ ”. A parte imaginária “ $\sigma_i$ ”, define a frequência de oscilação temporal e relaciona-se com a velocidade “ $V$ ” de propagação do distúrbio através de :

$$V = \frac{\sigma_i}{|\mathbf{k}|} \quad (3.77)$$

Inserindo as Equações (3.74) nas equações de conservação obtidas após aplicação do distúrbio (Equações 3.66, 3.67, 3.68 e 3.71) obtêm-se oito equações lineares homogêneas com oito valores desconhecidos ( $\phi_{1m}, p_{flm}, u_{1xm}, u_{1ym}, u_{1zm}, v_{1xm}, v_{1ym}, v_{1zm}$ ) e coeficientes dependentes de “ $\sigma$ ” e “ $\mathbf{k}$ ”. Tal sistema de equações admite uma solução não trivial somente se o determinante da matriz dos coeficientes é nulo. Tal condição gera uma equação para “ $\sigma$ ” como função de “ $\mathbf{k}$ ”. As raízes de tal equação determinam todos os valores possíveis de “ $\sigma$ ” (modos) para um dado vetor de onda “ $\mathbf{k}$ ”.

Por outro lado, as características de propagação podem ser obtidas por manipulação do sistema dado pelas equações (3.66), (3.67) e (3.71)<sup>12</sup>, conforme procedimento proposto inicialmente por Anderson e Jackson (1968) e descrito a seguir.

---

<sup>12</sup> Deve ser observado que a Equação (3.68) somente relaciona os distúrbios de pressão da fase fluida com os demais.

Das equações da continuidade (3.66) e (3.67) tem-se:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{1}{1-\phi_0} \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + u_0^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} \right] \quad (3.78)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\phi_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} \quad (3.79)$$

Tomando a divergência para cada um dos termos da equação de quantidade de movimento para a fase particulada (Eq. 3.73), obtêm-se:

Para o 1º termo do 1º membro:

$$\phi_0 \left[ 1 + \frac{1}{1-\phi_0} C\delta \right] \frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^* \cdot \mathbf{v}_1 = - \left[ 1 + \frac{1}{1-\phi_0} C\delta \right] \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^{*2}} \quad (3.80)$$

Para o 2º termo do 1º membro:

$$-\delta \phi_0 \left( 1 + \frac{C}{1-\phi_0} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} (\nabla^* \cdot \mathbf{u}_1) + u_0^* \frac{\partial}{\partial x^*} (\nabla^* \cdot \mathbf{u}_1) \right] = -\delta \frac{\phi_0}{1-\phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1-\phi_0} \right) \left[ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^{*2}} + 2u_0^* \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^* \partial x^*} + u_0^{*2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^{*2}} \right] \quad (3.81)$$

Para o 1º termo do 2º membro:

$$\beta_0^* St^{-1/2} (\nabla^* \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla^* \cdot \mathbf{v}_1) = \beta_0^* St^{-1/2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} \frac{1}{\phi_0(1-\phi_0)} + \frac{u_0^*}{1-\phi_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} \right) \quad (3.82)$$

Para o 2º termo do 2º membro:

$$\beta_\phi^* St^{-1/2} (\nabla^* \phi_1 \cdot u_0^* \mathbf{i}) = \beta_\phi^* St^{-1/2} u_0^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} \quad (3.83)$$

Para o 3º termo do 2º membro:

$$\nabla^* \cdot [\phi_1 (1 - \delta) \mathbf{i}] = -(1 - \delta) \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} \quad (3.84)$$

Para o 4º termo do 2º membro:

$$-p_{s\phi}^* \nabla^* \cdot \nabla^* \phi_1 = -p_{s\phi}^* \nabla^{*2} \phi_1 \quad (3.85)$$

Para o 5º termo do 2º membro:

$$vSt^{-1/2} \nabla^{*2} (\nabla^* \cdot \mathbf{v}_1) = vSt^{-1/2} \nabla^{*2} \left( -\frac{1}{\phi_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} \right) \quad (3.86)$$

Reunindo as parcelas (3.80) a (3.86), tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{\delta}{1 - \phi_0} \left[ C - \phi_0 \left( 1 + \frac{C_0}{1 - \phi_0} \right) \right] \right] \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^{*2}} + \delta \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) \left[ 2u_0^* \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^* \partial x^*} \right] \\ & + St^{-1/2} \beta_0^* \frac{1}{\phi_0 (1 - \phi_0)} \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + \frac{vSt^{-1/2}}{\phi_0} \nabla^2 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} \right) + St^{-1/2} \beta_0^* \frac{u_0^*}{(1 - \phi_0)} \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} \\ & + \beta_\phi^* u_0^* St^{-1/2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} - (1 - \delta) \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} - p_{s\phi}^* \nabla^{*2} \phi_1 + \delta \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) u_0^{*2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^{*2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

A equação anterior é uma equação diferencial parcial linear na variável  $\phi_1$

Usando a Equação (3.74), obtém-se:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} = I k_x \phi_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(I k \cdot x^*)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^{*2}} = \sigma^2 \phi_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(I k \cdot x^*)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^* \partial t^*} = \sigma I k_x \phi_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(I k \cdot x^*)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} = \sigma \phi_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(I k \cdot x^*)$$



$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^{*2}} = -k_x^2 \phi_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(\mathbf{I} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^*)$$

$$\nabla^{*2} \phi_1 = -|\mathbf{k}|^2 \phi_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(\mathbf{I} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^*)$$

$$\nabla^{*2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} = -|\mathbf{k}|^2 \sigma \phi_{1m} \exp(\sigma t^*) \exp(\mathbf{I} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^*) \quad (3.88a, b, c, d, e, f, g)$$

Substituindo as derivadas dadas por (3.88) em (3.87) resulta:

$$\phi_{1m} [A_1 \sigma^2 + A_2 \sigma + A_3] = 0 \quad (3.89)$$

$$A_1 = 1 + \frac{\delta}{1 - \phi_0} \left[ C - \phi_0 \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) \right] \quad (3.90)$$

$$A_2 = \delta \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) 2u_0^* \mathbf{I} \mathbf{k} \text{ Sen}(\theta) + St^{-1/2} \beta_0 \left( \frac{1}{\phi_0 (1 - \phi_0)} \right) - \frac{\nu St^{-1/2}}{\phi_0} k^2 \quad (3.91)$$

$$A_3 = \left[ St^{-1/2} \beta_0^* \frac{u_0^*}{1 - \phi_0} + \beta_{\phi}^* u_0^* - (1 - \delta) \right] \mathbf{I} \mathbf{k} \text{ Sen}(\theta) + p_{s\phi}^* k^2 - \delta \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) u_0^{*2} k^2 \text{ Sen}^2(\theta) \quad (3.92)$$

Os coeficientes dados pelas Equações (3.90) a (3.92) são dependentes de propriedades do estado básico. Nas equações anteriores, “ $\theta$ ” é o ângulo formado entre o vetor “ $\mathbf{k}$ ” e a horizontal. Deste modo a onda possui característica de propagação bidimensional.

A equação anterior é satisfeita se  $\phi_{1m} = 0$  que corresponde à uma solução trivial, i.e., para leito em fluidização uniforme, ou

$$A_1 \sigma^2 + A_2 \sigma + A_3 = 0 \quad (3.93)$$

As raízes da equação quadrática anterior determinam os valores de “ $\sigma$ ” para um dado vetor de onda “ $\mathbf{k}$ ”. Tais raízes são dadas por:

$$\sigma = \frac{1}{2A_1} \left[ -A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3} \right] \quad (3.94)$$

Onde as partes real e imaginária de “ $\sigma$ ” são dadas, respectivamente por:

$$\sigma_r = \frac{1}{2A_1} \left[ -\text{Re}(A_2) \pm \sqrt{\frac{1}{2}|z| + \bar{x}} \right] \quad (3.95)$$

e

$$\sigma_i = \frac{1}{2A_1} \left[ -\text{Im}(A_2) \pm \text{sign}(\bar{y}) \sqrt{\frac{1}{2}|z| - \bar{x}} \right] \quad (3.96)$$

Onde:

$$|z| = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \quad (3.97)$$

$$\bar{x} = \text{Re}(A_2^2 - 4A_1A_3) \quad (3.98)$$

$$\bar{y} = \text{Im}(A_2^2 - 4A_1A_3) \quad (3.99)$$

“**Re**” e “**Im**” correspondem às partes real e imaginária da expressão entre parênteses

e

$$\text{sign}(\bar{y}) = \begin{cases} 1, & \bar{y} > 0 \\ -1, & \bar{y} < 0 \end{cases} \quad (3.100)$$

Considerando o sinal negativo antes da raiz quadrada em (3.95), obtém-se um valor negativo para “ $\sigma_r$ ”, ou seja a condição de estabilidade. Por outro lado, um sinal positivo antes da raiz resulta eventualmente em “ $\sigma_r$ ” positivo que significa condição de instabilidade.

No Capítulo 6, será discutida a influência dos diversos parâmetros do modelo sobre as

características de propagação definidas anteriormente.

### 3.8.1 - Os distúrbios correspondentes a fluidização homogênea

Nesta seção serão discutidas as características de propagação dos distúrbios correspondentes a fluidização homogênea.

Escrevendo o determinante do sistema formado pelas Equações (3.66), (3.67) e (3.73), após a introdução dos distúrbios na forma (3.74a, b, d), tem-se:

$$(\mathbf{u}_{1m} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{v}_{1m} \cdot \mathbf{k})\phi_{1m}[A_1\sigma^2 + A_2\sigma + A_3] = 0 \quad (3.101)$$

Além de ser satisfeita na situação dada pela Equação (3.93), a equação anterior é satisfeita, se os dois primeiros fatores são nulos, i.e.:

$$(\mathbf{u}_{1m} \cdot \mathbf{k}) = 0 \quad (3.102)$$

$$(\mathbf{v}_{1m} \cdot \mathbf{k}) = 0 \quad (3.103)$$

As equações anteriores correspondem a distúrbios transversais à direção de propagação e usando as Equações (3.74a, b) podem ser reescritas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (3.104)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (3.105)$$

Introduzindo as equações anteriores nas Equações (3.66) e (3.67), a solução do sistema resultante corresponde a  $\phi_{1m} = 0$ , i.e., fluidização homogênea.

No presente trabalho serão desconsiderados tais classes de distúrbios, i.e., distúrbios nos campos de velocidades com direções de propagação transversais às direções de oscilação da amplitude e correspondentes a fluidização homogênea ( $\phi_0 = 0$ ).

### 3.9 Hierarquia de ondas e critério de estabilidade

Nesta seção será apresentada a decomposição da equação de propagação (Eq. 3.87) em ondas distintas, e o critério para a estabilidade baseado nesta operação será formulado.

Conforme seção anterior, a Equação (3.87) descreve a propagação de um distúrbio de pequena magnitude “ $\phi_1$ ” na fração de sólidos. Tal equação diferencial parcial linear foi obtida ao manipular-se o sistema dado pelas Equações (3.66), (3.67) e (3.73), obtidas após a aplicação de distúrbios de pequena magnitude nos campos:  $\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}, p_f$ .

A Equação (3.87) pode ser escrita como:

$$A_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^{*2}} + B_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^* \partial x^*} + D_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^{*2}} - E_c \nabla^{*2} \phi_1 - F_c \frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^{*2} \phi_1 + G_c \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + H_c \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} = 0 \quad (3.106)$$

Onde:

$$A_c = \left[ 1 + \frac{\delta}{1 - \phi_0} \left[ C - \phi_0 \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) \right] \right]$$

$$B_c = \delta \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) 2u_0^*$$

$$D_c = \delta \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) u_0^{*2}$$

$$E_c = p_{s\phi}^*$$

$$F_c = -\frac{v St^{-1/2}}{\phi_0}$$

$$G_c = St^{-1/2} \beta_0^* \frac{1}{\phi_0(1-\phi_0)}$$

$$H_c = St^{-1/2} \beta_0^* \frac{u_0^*}{(1-\phi_0)} + \beta_\phi^* u_0^* St^{-1/2} - (1-\delta) \quad (3.107a, b, c, d, e, f)$$

Fatorando a Equação (3.106), dividindo-a por “ $G_c$ ” e definindo:

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \nabla_h^{*2}, \text{ onde } \nabla_h^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}, \text{ resulta:}$$

$$\left[ \frac{A_c}{G_c} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^{*2}} + \frac{B_c}{G_c} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^* \partial t^*} + \frac{D_c - E_c}{G_c} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^{*2}} \right] + \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + \frac{H_c}{G_c} \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} \right] - \left[ \frac{E_c}{G_c} \nabla_h^{*2} \phi_1 + \frac{F_c}{G_c} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + \nabla_h^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} \right) \right] = 0 \quad (3.108)$$

Reescrevendo o 1º termo entre colchetes da Equação anterior:

$$\frac{A_c}{G_c} \left[ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^{*2}} + \frac{B_c}{A_c} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^* \partial x^*} + \frac{D_c - E_c}{A_c} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^{*2}} \right] \equiv \frac{A_c}{G_c} \left( \frac{\partial}{\partial t^*} - R_1 \right) \left( \frac{\partial}{\partial t^*} - R_2 \right) \phi_1 \quad (3.109)$$

$R_1, R_2$  são as raízes do “polinômio” quadrático definido no 1º membro de (3.109), sendo dados por:

$$R_1 = \frac{-\frac{B_c}{A_c} \frac{\partial}{\partial x^*} - \sqrt{\left(\frac{B_c}{A_c} \frac{\partial}{\partial x^*}\right)^2 - 4(1) \frac{D_c - E_c}{A} \left(\frac{\partial}{\partial x^*}\right)^2}}{2} = \frac{B}{2A_c} \left( -1 - \sqrt{1 + \frac{4A_c(D_c - E_c)}{B_c^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x^*} \quad (3.110)$$

$$R_2 = \frac{-\frac{B_c}{A_c} \frac{\partial}{\partial x^*} + \sqrt{\left(\frac{B_c}{A_c} \frac{\partial}{\partial x^*}\right)^2 - 4(1) \frac{D_c - E_c}{A} \left(\frac{\partial}{\partial x^*}\right)^2}}{2} = \frac{B_c}{2A_c} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4A_c(D_c - E_c)}{B_c^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x^*} \quad (3.111)$$

Inserindo os resultados expressos por (3.110) e (3.111) e explicitando o 2º termo de (3.108):

$$\frac{A_c}{G_c} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 + \left( \frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 = \frac{F_c}{G_c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \left( \frac{F_c}{G_c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{E_c}{G_c} \right) \nabla_h^2 \phi_1 \quad (3.112)$$

Onde:

$$c_1 = \frac{B_c}{2A_c} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4A_c(D_c - E_c)}{B_c^2}} \right) \quad (3.113)$$

$$c_2 = \frac{B_c}{2A_c} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4A_c(D_c - E_c)}{B_c^2}} \right) \quad (3.114)$$

$$a_1 = \frac{H_c}{G_c} \quad (3.115)$$

Aqui,  $c_1$  e  $c_2$  podem ser interpretadas como velocidades de ondas de 2ª ordem e  $a_1$  como velocidade de onda de 1ª ordem.

Para a situação de propagação unidimensional na direção vertical  $x$ , o 2º termo do 2º membro de (3.112) é nulo.

Conforme Whitham (1974), o critério de estabilidade aplicável à Equação (3.112) leva a:

$$c_1 > a_1 > c_2 \quad (3.116)$$

Assim, a instabilidade ocorre sempre que a velocidade da onda de 1ª ordem “ $a_1$ ” excede a velocidade da 1ª onda de 2ª ordem “ $c_1$ ”, ou encontra-se abaixo da velocidade da 2ª onda de 2ª ordem “ $c_2$ ”.

O critério de estabilidade pode ser verificado pelo método aproximado descrito a seguir.

Usando a aproximação abaixo, para todas as expressões entre colchetes excetuando a 1ª.

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \approx -c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} \quad (3.117)$$

A Equação (3.112), torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{A_c}{G_c} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 + \left( \frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 &= \frac{F_c}{G_c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \left( \frac{F_c}{G_c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{E_c}{G_c} \right) \nabla_h^2 \phi_1 \\ \frac{A_c}{G_c} \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \left( -c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} + c_2 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \phi_1 + \left( -c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} + a_1 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \phi_1 &= \frac{F_c}{G_c} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left( -c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \phi_1 \end{aligned} \quad (3.118)$$

Rearranjando:

$$\frac{A_c}{G_c} \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) (c_2 - c_1) \frac{\partial}{\partial x^*} \phi_1 + (a_1 - c_1) \frac{\partial}{\partial x^*} \phi_1 = \frac{F_c}{G_c} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left( -c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \phi_1 \quad (3.119)$$

Dividindo por “ $\frac{\partial}{\partial x^*}$ ” e desprezando-se o 2º membro da equação anterior, tem-se:

$$\frac{A_c}{G_c} (c_2 - c_1) \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \phi_1 + (a_1 - c_1) \phi_1 = 0 \quad (3.120)$$

Rearranjando:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t^*} + c_1 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \phi_1 + \frac{G_c (a_1 - c_1)}{A_c (c_2 - c_1)} \phi_1 = 0 \quad (3.121)$$

E por fim:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + c_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} + K \phi_1 = 0 \quad (3.122)$$

A equação diferencial parcial de 1ª ordem anterior pode ser resolvida pelo método das características.

A equação das curvas características e a solução de (3.122) ao longo das mesmas são resumidas por:

$$\frac{dt^*}{1} = \frac{dx^*}{c_1} = \frac{d\phi_1}{-K\phi_1} \quad (3.123)$$

Desta forma as curvas características são dadas por:

$$\frac{dx^*}{dt^*} = c_1 \Rightarrow x^* = c_1 t^* + K_1 \quad (3.124)$$

A solução da EDP ao longo das mesmas é:

$$\frac{d\phi_1}{-K\phi_1} = dt^* \Rightarrow \phi_1 = K_2 e^{-Kt^*} \quad (3.125)$$



As constantes  $K_2$  são dependentes da especificação das curvas características dadas por (3.124), ou seja, podem ser consideradas como função das constantes  $K_1$ . Tendo em vista tal consideração a solução dada em (3.125) pode ser escrita por:

$$\phi_1 = f(x^* - c_1 t^*) e^{-K t^*} \quad (3.126)$$

Da equação anterior, verifica-se que para a condição estável deve-se ter “ $K > 0$ ”, resultando um distúrbio decrescente com o tempo.

Para a presente situação tem-se “ $\frac{G_c}{A_c}$ ” positivo e “ $c_2 - c_1$ ” negativo. Deste modo, usando a definição de  $K$  (Eqs. 3.121 e 3.122), para se ter estabilidade faz-se necessário que “ $c_1 > a_1$ ”. Por procedimento análogo, é possível demonstrar que a condição de estabilidade requer também que “ $a_1 > c_2$ ”.

Alternativamente, o critério de estabilidade pode ser formulado em termos da derivada da pressão da fase sólida em relação à fração de sólidos. A seguir será descrito tal procedimento.

Para a estabilidade, é necessário que:

$$\sigma_r < 0 \quad (3.127)$$

Utilizando a Equação (3.95) (vide seção anterior) a desigualdade anterior é equivalente a:

$$\text{Re}(A_2) < \sqrt{\frac{1}{2}|z| + \bar{x}} \quad (3.128)$$

Utilizando as equivalências para o caso vertical ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) entre as equações (3.90) a (3.92) e os coeficientes definidos nas Equações (3.106) e (3.107), tem-se:

$$A_1 = A_c \quad (3.129)$$

$$A_2 = I k B_c + G_c - F_c k^2 \quad (3.130)$$

$$A_3 = I k H_c + E_c k^2 - D_c k^2 \quad (3.131)$$

Substituindo as Equações (3.129) a (3.131) na desigualdade (3.128), e desenvolvendo-a para o coeficiente  $E_c$  obtêm-se:

$$E_c > \frac{D_c (G_c + F_c k^2)^2 + H_c (A_c H_c - B_c (G_c + F_c k^2))}{(G_c + F_c k^2)} \quad (3.132)$$

Desprezando os efeitos da viscosidade da fase sólida (i.e. negligenciando o coeficiente  $F_c$ ) e utilizando as Equações (3.61), (3.62) e (3.107) chega-se a:

$$E_c > \frac{1}{324} St^{1/2} (1 - \delta) (1 - \phi)^{n-1} \phi \left\{ 18C\delta(\phi - 1)\phi(n\phi - 1) \right. \\ \left. + St^{1/2}(\delta - 1) \left[ \delta \left\{ (\phi - 1)(n\phi - 1)^2 + C(-\phi(n + \phi - 2) - 1) - 1 \right\} - n^2(\phi - 1)^2 \phi \right] (1 - \phi)^n \right\} \quad (3.133)$$

A desigualdade anterior permite a obtenção do valor do módulo de elasticidade da fase sólida “ $p_{s\phi}^*$ ” necessário para estabilizar o leito. No Capítulo 6, tal equação será utilizada novamente com os resultados experimentais de Ham et al (1990).

## **Capítulo 4**

### **O conceito de temperatura granular**

#### **4.1 – Introdução**

Neste capítulo são apresentados os conceitos introdutórios referentes ao modelo proposto para a investigação da estabilidade de leitos fluidizados. Na Seção 4.2 será apresentada a definição da temperatura granular, bem como deduzida sua equação de balanço. Na Seção 4.3, utilizando-se de argumentos heurísticos, encontra-se deduzida a dependência desta temperatura granular, das propriedades associadas à fase sólida particulada. Nas Seções 4.4 e 4.5 encontram-se discutidos os modelos de Buyevich (1994) e Koch e Sangani (1999) para as propriedades associadas à fase sólida particulada. Por fim, na Seção 4.6 encontra-se proposto um novo modelo para tais propriedades baseado nas considerações da Seção 4.3 e nos demais modelos.

#### **4.2 A temperatura granular e sua equação de balanço**

O conceito de temperatura granular remonta a uma analogia entre o escoamento de materiais particulados e o movimento das moléculas de um gás dado pela teoria cinética. De forma similar a um gás, o transporte de quantidade de movimento em escoamentos de particulados é admitido dependente das flutuações de velocidades das partículas em torno de um valor médio. Deste modo, a energia cinética associada a tais flutuações de velocidade pode ser utilizada na definição da temperatura granular “ $T$ ” conforme a equação:

$$\frac{3}{2}T = \frac{1}{2} \langle (v - \bar{v})^2 \rangle \quad (4.1)$$

Onde “v” representa a velocidade instantânea de partícula e “ $\bar{v}$ ” o valor médio. O duplo colchete denota uma média temporal.

Por outro lado, a analogia anterior necessita levar em conta alguns aspectos fundamentais nos quais partículas e moléculas diferem. Tais aspectos situam-se em 2 grupos:

- a) Geometria
- b) Forças de interação

Com relação à geometria, a diferença de tamanho entre moléculas e partículas impõe restrições na aplicabilidade da hipótese do contínuo para as partículas. Dado que o número de partículas em um volume típico é muito inferior ao número de moléculas (e.g. 1 mm<sup>3</sup> pode conter em torno de 10<sup>19</sup> moléculas de água, mas apenas 10 grãos de areia), a admissão de propriedades contínuas neste volume fica comprometida. A solução de tal problema consiste na adoção de escalas de comprimento maiores para a adoção da hipótese do contínuo. Tais escalas maiores são as mesmas consideradas para a obtenção das equações médias volumétricas do escoamento multifásico (vide Ishii, 1975; e Fan e Zhu, 1998). Deve-se também lembrar que ao contrário das moléculas, partículas não são idênticas e possuem uma distribuição por tamanho, massa e forma. Obviamente, a adoção de tais hipóteses adicionam complexidade ao estudo.

Conforme o modelo mais simplista da teoria cinética, a interação resultante das colisões entre moléculas é elástica. Para partículas, contudo, tal hipótese é irrealista, uma vez que todas as colisões envolvem perdas de energia cinética. Além disso, partículas não são perfeitamente esféricas. Assim, forças tangenciais podem ocorrer durante a colisão entre as mesmas e tais forças de atrito não possuem analogia na teoria cinética dos gases. Por fim, forças de ação à distância, como as de potencial molecular, não estão presentes no caso de partículas.

Tendo em vista os aspectos anteriores, os passos fundamentais para a extensão da teoria cinética dos gases aos sistemas particulados necessitam ser adequadamente considerados (Sela, Goldhirsch e Noskowics, 1996). Detalhes de tais passos podem ser encontrados nos trabalhos de

Jenkins e Savage (1983) e Gidaspow (1994).

O emprego da temperatura granular e sua equação de conservação para o escoamento de materiais granulares iniciaram-se nos anos 80 (Savage e Jeffrey, 1981; Haff, 1983, Jenkins e Richman, 1986). A modelagem anterior vem sendo empregada com sucesso ao longo das duas últimas décadas na descrição dos escoamentos de suspensões particuladas densas<sup>13</sup> através de canais e orifícios (Savage, 1998).

O uso do conceito de temperatura granular e de sua equação de conservação para o estudo da estabilidade de leitos fluidizados é relativamente recente (Didwania, 1999, Koch e Sangani, 1999, Diwania e Costa, 2000).

Uma dedução para a equação de balanço da temperatura granular será apresentada a seguir.

Sejam as equações de conservação da massa e quantidade de movimento, válidas para uma fase particulada de densidade efetiva “ $\rho_b$ ”<sup>14</sup>:

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_b \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (4.2)$$

$$\rho_b \frac{D \bar{\mathbf{v}}}{Dt} = \rho_b \mathbf{g} - \nabla \cdot \Pi \quad (4.3)$$

Considerando que a velocidade instantânea “ $\mathbf{v}$ ” relaciona-se com a flutuação “ $\mathbf{v}'$ ” através de:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (4.4)$$

Além disso, utilizando a definição da temperatura granular (Eq. 4.1), a energia cinética associada à velocidade instantânea é dada por:

$$\frac{\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle}{2} = \frac{1}{2} \left( \bar{\mathbf{v}}^2 + \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle \right) = \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} + \frac{3T}{2} \quad (4.5)$$

E sua equação de conservação:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} + \frac{3T}{2} \right) = \rho_b \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (\Pi \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \Gamma_d \quad (4.6)$$

---

<sup>13</sup> O termo denso é empregado para caracterizar as misturas cuja fração volumétrica de sólidos é superior a 40 %

Na equação anterior, o primeiro termo do lado direito da igualdade representa o trabalho efetuado pela força de gravidade. O segundo termo representa o fluxo “condutivo”, i.e., o fluxo que ocorre quando do contato entre partículas. O terceiro termo representa o trabalho das forças de superfície. Por fim, o quarto termo representa a dissipação de energia durante as colisões.

Multiplicando-se a equação de quantidade de movimento (Eq. 4.3) por “ $\bar{\mathbf{v}}$ ”

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) = \rho_b \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \cdot \Pi \quad (4.7),$$

e utilizando a relação

$$\nabla \cdot (\Pi \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \cdot \Pi = \Pi^T : \nabla \bar{\mathbf{v}} \quad (4.8)$$

na equação anterior e subtraindo o resultado de (4.7), resulta:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{3T}{2} \right) = -\Pi^T : \nabla \bar{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \Gamma_d \quad (4.9)$$

Admitindo que o tensor “ $\Pi$ ” seja simétrico, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\frac{3}{2} \rho_b \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = -\Pi : \nabla \bar{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \Gamma_d \quad (4.10)$$

Como será visto adiante, a extensão da equação anterior para sistemas fluidizados torna necessário a inclusão de um termo fonte “ $\Gamma_s$ ” que representa o efeito do movimento relativo entre as fases, e a equação anterior pode ser escrita como:

$$\frac{3}{2} \rho_s \phi \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = \Pi_s : \nabla \mathbf{v} + \nabla (\lambda \nabla T) + \Gamma_s - \Gamma_d \quad (4.11)$$

---

<sup>14</sup>  $\rho_b = \phi \rho_s$

Deve-se observar que a utilização da teoria cinética fornece equações similares às equações de conservação obtidas utilizando uma formulação multifásica. De fato, uma das principais vantagens da extensão da teoria cinética dos gases aos sistemas particulados é a possibilidade de formulação de termos como o tensor cinético e o vetor fluxo de calor através da função de distribuição de velocidades admitida. Tal procedimento elimina o uso de excessivas suposições para a pressão e viscosidade da fase particulada.

Na próxima seção serão obtidas tais propriedades utilizando uma aproximação heurística. Tal abordagem ajuda a esclarecer alguns aspectos físicos do problema sem o uso de extensa álgebra.

### **4.3 Obtenção de propriedades por análise dimensional - Aproximação Heurística**

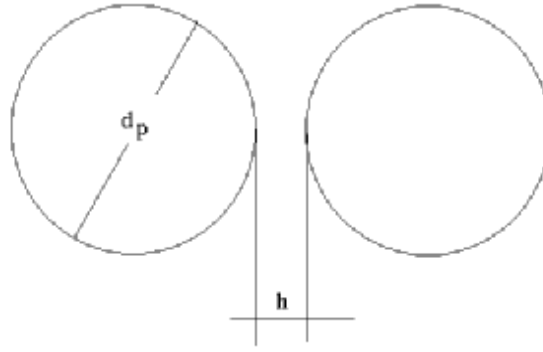
A natureza da interação entre as partículas permite a divisão do escoamento de materiais particulados em dois regimes (Jenkins e McTigue, 1990): inercial (ou colisional) e viscoso. Para cada um dos regimes, as parcelas e propriedades das equações de conservação são formuladas e relacionadas com as flutuações de velocidade da fase particulada<sup>15</sup>.

#### **4.3.1 O regime inercial**

Seja o arranjo típico entre duas partículas ilustrado pela Figura 4.1:

---

<sup>15</sup> Na literatura comumente surge a denominação de “rápido” e “lento” para escoamentos de particulados “densos”. Aqui será admitido que o termo “rápido” se refira ao regime inercial e de que o termo “lento” se refira ao regime viscoso.



**Figura 4.1 – Relações geométricas para um arranjo de partículas**

Onde o espaçamento entre as partículas é denotado por “h” e o diâmetro médio por “d<sub>p</sub>”. Para um sistema denso será admitido:

$$\frac{h}{d_p} \ll 1 \quad (4.12)$$

Ou seja, o espaçamento típico entre as partículas é muito menor que os diâmetros. Observa-se, também, que a fração volumétrica de sólidos “ $\phi$ ” pode ser relacionada com a razão entre “h” e “d<sub>p</sub>” através de:

$$\frac{h}{d_p} = f(\phi) \quad (4.13)$$

Para sistemas densos, a densidade das partículas pode ser aproximada por:

$$\rho_s \sim \frac{m}{d_p^3} \quad (4.14)$$

A frequência que as partículas colidem possui a dimensão inversa do tempo. Tal frequência pode ser expressa pela divisão da raiz quadrada da temperatura granular “T<sup>1/2</sup>” pela distância “h” percorrida durante uma colisão, resultando:

$$\text{Frequência de colisão} \sim \frac{T^{1/2}}{h} \quad (4.15)$$

Em uma colisão típica, a troca de quantidade de movimento possui magnitude de “mT<sup>1/2</sup>”. A frequência de colisão é dada por “T<sup>1/2</sup>/h”, e a área através da qual o fluxo de quantidade de



movimento ocorre é proporcional a “ $1/d_p^2$ ”. A combinação destas relações produz a respectiva escala para o fluxo devido à flutuação de velocidade, i.e., a pressão:

$$p_s \sim \rho_s \frac{d_p}{h} T \quad (4.16)$$

Para a obtenção de uma escala para a viscosidade é considerado o fluxo transversal de quantidade de movimento longitudinal média, i.e., o fluxo associado à velocidade média através de um plano paralelo à direção da quantidade de movimento considerada. A quantidade de movimento longitudinal média trocada durante uma colisão entre partículas é dada por “ $md_p \frac{dv}{dn}$ ”, onde “ $\frac{dv}{dn}$ ” é o gradiente da velocidade média na direção transversal “n”. A frequência de colisão e a área possuem as mesmas escalas discutidas anteriormente. Deste modo, a tensão de cisalhamento “ $\tau_s$ ” é dada por:

$$\tau_s \sim \frac{T^{1/2}}{h} \frac{1}{d_p^2} md_p \frac{dv}{dn} \quad (4.17)$$

ou

$$\tau_s \sim \rho_s \frac{d_p}{h} d_p T^{1/2} \frac{dv}{dn} \quad (4.18)$$

E a viscosidade da fase sólida “ $\mu_s$ ” dada por:

$$\mu_s \sim \frac{\tau_s}{\frac{dv}{dn}} \sim \rho_s \frac{d_p}{h} d_p T^{1/2} \quad (4.19)$$

A energia flutuacional<sup>16</sup> transferida por colisão é dada por “ $m d_p \frac{dT}{dn}$ ”, onde “ $\frac{dT}{dn}$ ” é o gradiente transversal. A multiplicação do termo anterior pela frequência de colisão e a divisão pela escala de área, fornecem o fluxo “ $q$ ” transversal de energia flutuacional, ou:

$$q \sim m \Delta T \frac{T^{1/2}}{h} \frac{1}{d_p^2} \quad (4.20)$$

e a condutividade “ $\kappa_s$ ” é dada por:

$$\kappa_s \sim \frac{q}{\frac{dT}{dn}} \sim \rho_s d_p \frac{d_p}{h} T^{1/2} \quad (4.21)$$

O termo de dissipação, i.e., a perda de energia flutuacional por colisão, é formulado a seguir.

A energia flutuacional perdida por colisão é dada por “ $(1 - e_r)mT$ ”, onde “ $e_r$ ” é o coeficiente de restituição. A multiplicação do termo anterior pela densidade volumétrica “ $1/d_p^3$ ” e pela frequência de colisão “ $T^{1/2}/h$ ”, produz a taxa de dissipação volumétrica “ $\Gamma_d$ ”

$$\Gamma_d \sim (1 - e_r)mT \frac{T^{1/2}}{h} \frac{1}{d_p^3} \quad (4.22)$$

ou

$$\Gamma_d \sim \rho_s \frac{d_p}{h} \frac{(1 - e_r)}{d_p} T^{3/2} \quad (4.23)$$

---

<sup>16</sup> O termo “flutuacional” será empregado aqui para identificar a energia cinética associada às flutuações de velocidades das partículas.

### 4.3.2 O regime viscoso

Para o regime viscoso, a interação entre as partículas se dá por intermédio do fluido intersticial. A análise dimensional descrita a seguir permite a formulação dos termos viscosidade, condutividade, dissipação e pressão referentes à fase sólida. Definindo o número de Reynolds:

$$\text{Re}_g = \frac{\rho_s T^{1/2} d_p}{\mu_f} \quad (4.24)$$

No regime viscoso espera-se que as forças de natureza inerciais dêem lugar às forças de natureza viscosa. Portanto, é esperado que a densidade “ $\rho_s$ ” não seja incluída no modelo, mas substituída por “ $\frac{\mu_f}{d_p T^{1/2}}$ ”.

A magnitude da força “F” de interação entre duas esferas idênticas em aproximação com velocidade relativa “U” é dada pela teoria da lubrificação:

$$F \sim \mu_f d_p U \frac{d_p}{h} \quad (4.25)$$

A velocidade relativa “U” é a soma da velocidade média e da componente de flutuação, ou seja:

$$U = v + T^{1/2} \quad (4.26)$$

Utilizando o desenvolvimento da seção anterior, o fluxo transversal de quantidade de movimento longitudinal médio é dado por:

$$\tau_s \sim \frac{m}{d_p^3} \frac{d_p}{h} T^{1/2} \frac{dv}{dn} d_p \quad (4.27)$$

Utilizando as relações válidas para o regime viscoso, tem-se:

$$\rho_s \sim \frac{m}{d_p^3} \sim \frac{\mu_f}{d_p T^{1/2}} \quad (4.28)$$

Resultando:

$$\tau_s \sim \mu_f \frac{d_p}{h} \frac{dv}{dn} \quad (4.29)$$

e

$$\mu_s \sim \frac{\tau_s}{\frac{dv}{dn}} \sim \mu_f \frac{d_p}{h} \quad (4.30)$$

O fluxo transversal de energia flutuacional “q” é o trabalho da força “F” relacionado com o incremento “ $\frac{d_p}{T^{1/2}} \frac{dT}{dn}$ ” da velocidade de flutuação, ou seja:

$$q \sim \frac{1}{d_p^2} \mu_f d_p T^{1/2} \left( \frac{d_p}{h} \right) \left( \frac{d_p}{T^{1/2}} \frac{dT}{dn} \right) \quad (4.31)$$

ou

$$q \sim \mu_f \left( \frac{d_p}{h} \right) \frac{dT}{dn} \quad (4.32)$$

e

$$\kappa_s \sim \frac{q}{\frac{dT}{dn}} \sim \mu_f \left( \frac{d_p}{h} \right) \quad (4.33)$$

O termo de dissipação é obtido pela substituição direta de “ $\frac{\mu_f}{d_p T^{1/2}}$ ” na expressão para “ $\rho_s$ ” dada em (4.23) e admitindo-se “ $e_r$ ” igual a zero.

$$\Gamma_d \sim \mu_f d_p^2 \frac{T^{1/2}}{h} T^{1/2} \frac{1}{d_p^3} \quad (4.34)$$

A pressão da fase particulada é a média da flutuação na força por unidade de área, i.e,

$$p_s \sim \mu_f \frac{d_p (1 - e_r)}{h} T^{1/2} \quad (4.35)$$

A Tabela a seguir sintetiza a discussão dada nas duas seções anteriores.

**Tabela 4.1 - Dependência das propriedades da fase particulada nos regimes inerciais e viscosos**

	Inercial	Viscoso
Pressão, $p$	$\rho_s \frac{d_p}{h} T$	$\mu_f \frac{d_p (1 - e_r)}{h} T^{1/2}$
Viscosidade, $\mu_s$	$\rho_s \frac{d_p}{h} d_p T^{1/2}$	$\mu_f \frac{d_p}{h}$
Condutividade, $k$	$\rho_s d_p \frac{d_p}{h} T^{1/2}$	$\mu_f \left( \frac{d_p}{h} \right)$
Dissipação, $\Gamma_d$	$\rho_s \frac{d_p (1 - e_r)}{h} T^{3/2}$	$\mu_f d_p^2 \frac{T^{1/2}}{h} T^{1/2} \frac{1}{d_p^3}$

Nas próximas seções serão apresentados dois modelos para as propriedades da fase particulada baseados em considerações da teoria cinética dos gases.

#### 4.4 O modelo de Buyevich

O principal conceito do modelo de Buyevich (1994) está em assumir que a geração de temperatura granular é resultante de flutuações na fração volumétrica de sólidos. No mecanismo anterior, as flutuações na fração de sólidos induzem flutuações na força de arraste exercida pelo fluido sobre as partículas, que por fim geram variações na temperatura granular em uma direção

paralela à força de arraste. As relações constitutivas obtidas não são aplicáveis na faixa de Números de Stokes baixos e na região onde a fração de sólidos é relativamente densa. Em tal situação, as partículas podem formar “cadeias” capazes de transmitir tensões por meio de contatos sólido-sólido análogos aos descritos pela mecânica dos solos.

Os resultados obtidos por Buyevich para os termos de dissipação e o termo fonte são sumariados, respectivamente, por:

$$\Gamma_d = Q_c + Q_- = \frac{12}{\pi^{1/2}} (1-e) \frac{\rho_s \phi^2 \chi(\phi)}{a} T^{3/2} + \rho_s \phi [3F_1(\phi) + 4F_2(\phi)w] T = \alpha_c T^{3/2} + \alpha_- T \quad (4.36)$$

$$\Gamma_s = Q_+ = \left[ \alpha_- \sqrt{T^*} + \alpha_c T^* \right] \sqrt{T} \quad (4.37)$$

Onde:

$$F_1(\phi) = \frac{9}{2} \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{\mu_f}{\rho_f a^2} \frac{1}{(1-\phi)^{5/2}} \quad (4.38)$$

$$F_2(\phi) = \frac{3}{16} \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{1}{a} \left( \frac{1-\phi}{1-1.17\phi^{2/3}} \right)^2 \quad (4.39)$$

$$\chi(\phi) = \frac{\left( \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{1/3}}{4\phi \left[ 1 - \left( \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{1/3} \right]} \quad (4.40)$$

$$T^* = 6.145 \times 10^{-2} \left( \frac{1-0.56f}{3+4f} M \right)^2 \langle \phi^2 \rangle w^2 \quad (4.41)$$

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{\phi^2 \left[ 1 - \left( \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{1/3} \right]}{\left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{\left( \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{1/3}}{1 - \left( \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{1/3}} \right]} \quad (4.42)$$

$$M = \frac{1}{1 - \phi} + \frac{\frac{d}{d\phi}(\ln(F_1)) + f \frac{d}{d\phi}(\ln(F_2)) + \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \left( \frac{\mathbf{g}}{F_1 w} \right) \left( \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{w}}{w} \right)}{1 + 2f} \quad (4.43)$$

$$f = \frac{F_2(\phi)w}{F_1(\phi)} \quad (4.44)$$

E a pressão, viscosidade e condutividade da fase particulada são dadas por:

$$p_s = [1 + 4\phi\chi(\phi)]\rho_s\phi T \quad (4.45)$$

$$\mu_s = 4\phi \left\{ \frac{1}{4\phi\chi(\phi)} + 0.8 + 0.76(4\phi\chi(\phi)) \right\} \frac{5}{48} a\rho_s (\pi T)^{1/2} \quad (4.46)$$

$$\lambda_s = 4\phi \left\{ \frac{1}{4\phi\chi(\phi)} + 1.2 + 0.75(4\phi\chi(\phi)) \right\} \frac{25}{64} a\rho_s (\pi T)^{1/2} \quad (4.47)$$

Buyevich admite que as flutuações na velocidade das partículas são inicialmente anisotrópicas. Conforme o mesmo, tal anisotropia está em que mais energia cinética é transferida entre fluido e partículas na direção paralela ao seu escoamento do que na direção transversal. Entretanto, freqüentes colisões entre as partículas terminam por conduzir à uma distribuição isotrópica de temperatura granular.

## 4.5 O modelo de Koch e Sangani

Valendo-se de considerações da teoria cinética dos gases e de simulação numérica, Koch e Sangani (1999) investigaram o comportamento da pressão da fase particulada e dos limites marginais de estabilidade para leitos fluidizados por gás. Seus resultados visaram estender a aplicabilidade de resultados para sistemas diluídos obtidos em trabalho anterior (Koch, 1990). Contrariamente ao modelo discutido na seção anterior tais autores admitem que a distribuição de temperatura granular permaneça anisotrópica.

A seguir encontra-se sumariados seus resultados.

Para o termo fonte:

$$\Gamma_s = \frac{S U^2 \phi}{St^2 T^{1/2}} \quad (4.48)$$

onde

$$S = S_{\parallel} + 2 S_{\perp} \quad (4.49)$$

$$S = \left( \frac{T}{T_{\parallel}} \right)^{1/2} f_1 + 2 \left( \frac{T}{T_{\parallel}} \right)^{1/2} f_2 \quad (4.50)$$

$$f_1 = \frac{3}{16\pi^{1/2}} R_s R_{\text{drag}}^2 \left[ (\beta^5 + \beta) \ln \left( \frac{\beta+1}{\beta-1} \right) - \frac{2}{3} \beta^2 - 2\beta^4 \right] \quad (4.51)$$

$$f_2 = \frac{3}{16\pi^{1/2}} R_s R_{\text{drag}}^2 \left[ \frac{1}{2} (\beta^3 - \beta^5) \ln \left( \frac{\beta+1}{\beta-1} \right) - \frac{2}{3} \beta^2 + \beta^4 \right] \quad (4.52)$$

$$\beta^2 = \frac{T_{\parallel}}{T_{\parallel} - T_{\perp}} \quad (4.53)$$



$$R_s = \frac{1}{\chi(1 + 3.5\phi^{1/2} + 5.9\phi)} \quad (4.54)$$

$$R_{\text{drag}} = 0.7 + \frac{10\phi}{(1-\phi)^3}, \quad \phi \geq 0.4 \quad (4.55)$$

O termo de dissipação é dado por:

$$\Gamma_d = \frac{3\phi R_{\text{diss}}}{St} + \frac{24}{\pi^{1/2}}(1-\eta)BT^{3/2} \quad (4.56)$$

onde

$$R_{\text{diss}} = 1 + 3\left(\frac{\phi}{2}\right)^{1/2} + \left(\frac{135}{64}\right)\phi \ln(\phi) + 11.26\phi(1 - 5.1\phi + 16.57\phi^2 - 21.77\phi^3) - \phi\chi \ln(\varepsilon_m) \quad (4.57)$$

$$\lambda = 10^{-7} \text{ m} \quad (4.58)$$

$$\varepsilon_m = 4.88\left(\frac{\lambda}{a}\right) \quad (4.59)$$

A pressão e viscosidade da fase particulada são dadas por:

$$p_s = \left(\phi + \frac{8}{5}B\right)T_{\text{II}} + \left(\frac{12}{5}\right)BT \quad (4.60)$$

$$\mu_s = \frac{48}{5\pi^{1/2}}BT^{1/2} \quad (4.61)$$

onde

$$3T = T_{\text{II}} + 2T_{\perp} \quad (4.62)$$

$$B = \phi^2\chi\eta \quad (4.63)$$

$$\chi = \frac{1 + 2.5\phi + 4.5094\phi^2 + 4.515439\phi^3}{\left[1 - \left(\frac{\phi}{0.64356}\right)^3\right]^{0.678021}} \quad (4.64)$$

$$\eta = \frac{1 + e}{2} \quad (4.65)$$

Nas equações anteriores os subscritos “II” e “⊥” referem-se às direções vertical e horizontal, respectivamente.

## 4.6 O modelo proposto

O modelo proposto nesta seção busca incorporar os efeitos viscosos ignorados nas formulações dos termos associados à fase particulada dos modelos anteriores.

O ponto de partida para o desenvolvimento é uma analogia com os resultados da Seção 4.3. Desta forma, a pressão da fase particulada é dada por:

$$p_s = \frac{\mu_f}{d_p} T^{1/2} f_1(\phi) + \rho_s T f_2\left(\phi, \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \quad (4.66)$$

O primeiro e segundo termos a direita da igualdade representam as ações viscosas e inerciais discutidas na Seção 4.3. A função “ $f_1$ ” (vide Eq. 4.67) foi selecionada de modo a representar o efeito da concentração de sólidos sobre a viscosidade aparente de um fluido. A função “ $f_2$ ” é análoga à empregada nas formulações utilizadas nos modelos de Buyevich e Koch e Sangani. A expressão entre colchetes na Eq. (4.68) é denominada de função de distribuição radial e representa a razão entre a densidade local “ $n_s$ ” de partículas e a densidade média “ $\bar{n}_s$ ”.

$$f_1 = \left[1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right]^{-2} - 1 \quad (4.67)$$

$$f_2 = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \phi \left(1 + 4\phi \left[\frac{2 - \phi}{2(1 - \phi)^3}\right]\right) \quad (4.68)$$

Através de análises dimensionais é possível mostrar que a viscosidade da fase particulada, a condutividade e o termo de dissipação da equação de temperatura granular relacionam-se com a pressão da fase particulada por:

$$\mu_s = \frac{p_s}{\varepsilon} \quad (4.69)$$

$$\kappa_s = \mu_s \quad (4.70)$$

$$\Gamma_d = p_s \varepsilon \quad (4.71)$$

onde

$$\varepsilon = \frac{T^{1/2}}{d_p} \quad (4.72)$$

Nas formulações anteriores admite-se que as colisões entre partículas ocorram de forma inelástica, ou seja, o coeficiente de restituição “ $e_r$ ” é nulo (vide Tabela 4.1).

Por fim, a seguinte expressão é proposta para o termo fonte da equação de temperatura granular:

$$\Gamma_s = \frac{4d_p \beta^2 f}{(\rho_s - \rho_f) \sqrt{\pi T}} \quad (4.73)$$

onde

$$f = |\mathbf{w}_i - \mathbf{v}_i|^2 \equiv (\mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{u}_{mf\parallel} - \mathbf{v}_{\parallel})^2 + (\mathbf{u}_{\perp} - \mathbf{u}_{mf\perp} - \mathbf{v}_{\perp})^2 \quad (4.74)$$

e

$$w^2 = (\mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{u}_{mf\parallel} - \mathbf{v}_{\parallel}) \cdot (\mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{u}_{mf\parallel} - \mathbf{v}_{\parallel}) + (\mathbf{u}_{\perp} - \mathbf{u}_{mf\perp} - \mathbf{v}_{\perp}) \cdot (\mathbf{u}_{\perp} - \mathbf{u}_{mf\perp} - \mathbf{v}_{\perp}) \quad (4.75)$$

Estas relações são baseadas em uma extensão heurística dos resultados de Koch (1990).

## **Capítulo 5**

### **A análise linear não isotérmica**

#### **5.1 – Introdução**

Neste capítulo será desenvolvida a análise de estabilidade linear para o conjunto formado pelas equações de conservação da massa, quantidade de movimento e da temperatura granular. Tal análise visa a obtenção das características de propagação de instabilidades lineares tridimensionais para um sistema fluidizado não limitado espacialmente (i.e., com efeitos de paredes negligenciados).

#### **5.2 – Equações básicas**

As equações de conservação de massa e quantidade de movimento para as fases sólida e fluida (Didwania e Costa, 2000) são dadas por :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot [\phi \mathbf{v}] = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-\phi)\mathbf{u}] = 0 \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_s \phi \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = & -\nabla p_s + \mu_s \nabla^2 \mathbf{v} + \phi (-\nabla p_f + \mu_f \nabla^2 \mathbf{u}) \\ & + (1-\phi) \beta (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \phi C \rho_f \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{dt} + \phi \rho_s \mathbf{g} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_f (1-\phi) \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = & (1-\phi) (-\nabla p_f + \mu_f \nabla^2 \mathbf{u}) \\ & - (1-\phi) \beta (\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \phi C \rho_f \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{dt} + (1-\phi) \rho_f \mathbf{g} \end{aligned} \quad (5.4)$$

E a equação de balanço da temperatura granular é dada por Didwania e Costa (2000) como:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \rho_s \phi \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = & [-p_s I + \mu_s (\nabla \cdot \mathbf{v}) I + \mu_s (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)]: \nabla \mathbf{v} \\ & + \kappa_s \nabla^2 T + \Gamma_s - \Gamma_d \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para as equações anteriores é efetuada a mesma adimensionalização discutida na Seção 3.5, resultando:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot [\phi \mathbf{v}^*] = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot [(1-\phi)\mathbf{u}^*] = 0 \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \phi \left[ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* \right] = & -\nabla^* p_s^* + \nu St^{-1/2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \phi (-\delta \nabla^* p_f^* + St^{-1/2} \nabla^{*2} \mathbf{u}^*) \\ & + St^{-1/2} (1-\phi) \beta^* (\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*) + \phi C \delta \frac{d(\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*)}{dt^*} - \phi \mathbf{i} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\delta(1-\phi)\left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*)\mathbf{u}^*\right] = (1-\phi)\left(-\delta \nabla^* p_f^* + St^{-1/2} \nabla^{*2} \mathbf{u}^*\right) - St^{-1/2}(1-\phi)\beta^*(\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*) - \phi C \delta \frac{d(\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*)}{dt^*} - (1-\phi)\delta \mathbf{i} \quad (5.9)$$

$$\frac{3}{2}\phi\left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*)T^*\right) = \left[-p_s^* \mathbf{I} + \frac{\mathbf{v}}{St^{1/2}}(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*)\mathbf{I}\right] : \nabla^* \mathbf{v}^* + \frac{\lambda}{St^{1/2}} \nabla^{*2} T^* + \Gamma_s^* - \Gamma_d^* \quad (5.10)$$

onde

$$T^* = \frac{T}{gd_p} \quad (5.11)$$

$$\lambda = \frac{\kappa_s}{\mu_f} \quad (5.12)$$

$$\Gamma_s^* = \frac{\Gamma_s}{\rho_s g^{3/2} d_p^{1/2}} \quad (5.13)$$

$$\Gamma_d^* = \frac{\Gamma_d}{\rho_s g^{3/2} d_p^{1/2}} \quad (5.14)$$

Neste ponto observa-se que os seguintes parâmetros adimensionais são independentes:

- A razão “ $\delta$ ” entre as densidades do fluido e das partículas;
- A fração volumétrica de sólidos “ $\phi$ ”;
- O número de Stokes (definido na Eq. 3.54). Tal número pode ser interpretado como o que caracteriza as forças de interação entre as partículas. Em outras palavras, quando o mesmo é baixo, a interação entre as partículas ocorre por ação intermediária do fluido. Para valores elevados de tal número, a interação entre partículas se dá por meio de colisões.

Utilizando-se a Seção 2.6, as relações constitutivas adimensionais são dadas por:

$$p_s^* = \frac{1}{St^{1/2}} T^{*1/2} \mathbf{f}_1(\phi) + \mathbf{T}^* \mathbf{f}_2(\phi, \delta) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}_1(\phi_0) + St^{1/2} T^{*1/2} \mathbf{f}_2(\phi_0, \delta) \quad (5.16)$$

$$\Gamma_d^* = \frac{1}{St^{1/2}} T^* \mathbf{f}_1(\phi) + \mathbf{T}^{*3/2} \mathbf{f}_2(\phi, \delta) \quad (5.17)$$

$$\Gamma_s^* = \frac{4\beta^{*2} w^{*2}}{(1-\delta)\sqrt{\pi T^*}} \frac{1}{St} \quad (5.18)$$

### 5.3 O estado básico

O primeiro passo da análise de estabilidade linear consiste na definição do estado básico, dado por:

$$\phi = \phi_0 \quad (5.19)$$

$$\mathbf{u}^* = u_0^* \mathbf{i} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0^* = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

$$p_f^* = p_{f0}^*(\mathbf{x}^*) \quad (5.22)$$

As equações anteriores satisfazem identicamente as equações da continuidade. Por outro lado, sua substituição nas equações de conservação da quantidade de movimento resulta em:

$$0 = -\phi_0 \delta \nabla^* p_{f0}^* + St^{-1/2} (1-\phi) \beta_0^* u_0^* - \phi_0 \mathbf{i} \quad (5.23)$$

$$0 = -(1-\phi_0) \delta \nabla^* p_{f0}^* - St^{-1/2} (1-\phi_0) \beta_0^* u_0^* - (1-\phi_0) \delta \mathbf{i} \quad (5.24)$$

Somando-se as duas equações anteriores, resulta:



$$\delta \nabla^* p_{f0}^* = -[(1 - \phi_0)\delta + \phi_0]\mathbf{i} \quad (5.25)$$

E substituindo a equação acima na Equação (5.23), obtêm-se:

$$0 = \phi_0 [(1 - \phi_0)\delta + \phi_0 - 1]\mathbf{i} + St^{-1/2}(1 - \phi_0)\beta_0^* u_0^* \mathbf{i} \quad (5.26)$$

$$-\frac{\phi_0 [(1 - \phi_0)\delta + \phi_0 - 1]}{St^{-1/2}(1 - \phi_0)u_0^*} = \beta_0^* \quad (5.27)$$

Além disso, da correlação de Richardson e Zaki<sup>17</sup> (1954):

$$u_0^* = \frac{v_t}{\sqrt{gd_p}} (1 - \phi)^{n-1} \quad (5.28)$$

Onde “ $v_t$ ” é a velocidade terminal no regime de Stokes e dada por:

$$v_t = \frac{(\rho_s - \rho_f)gd_p^2}{18\mu_f} \quad (5.29)$$

Assim, resulta:

$$u_0^* = \frac{1}{18}(1 - \delta)St^{1/2}(1 - \phi)^{n-1} \quad (5.30)$$

e

$$\boxed{\beta_0^* = 18\phi_0(1 - \phi_0)^{-(n-1)}} \quad (5.31)$$

---

<sup>17</sup> Vide Apêndice A para uma discussão em detalhe da equação de Richardson e Zaki

Deve ser notado ainda, que a temperatura granular correspondente ao estado básico é determinada pela solução da equação:

$$\Gamma_{s0}^* - \Gamma_{d0}^* = 0 \quad (5.32)$$

## 5.4 Obtenção do sistema de equações diferenciais parciais lineares

O próximo passo da análise linear de estabilidade consiste na introdução das perturbações:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{u}_1 \quad (5.33)$$

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0^* + \mathbf{v}_1 \quad (5.34)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \quad (5.35)$$

$$p_f^* = p_{f0}^* + p_{f1} \quad (5.36)$$

$$T^* = T_0^* + T_1 \quad (5.37)$$

Aqui admite-se que as funções  $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \phi_1, p_{f1}, T_1$  sejam de pequena magnitude em relação as funções referentes ao estado básico. Assim, os termos de segunda ordem e superiores podem ser negligenciados. Isto permite que a substituição das funções anteriores nas Equações (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), combinadas com as Equações (5.30), (5.31) e (5.32), resulte nas seguintes equações diferenciais parciais lineares:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + \phi_0 \nabla^* \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (5.38)$$

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + (1 - \phi_0) \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1 - u_0^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned}
\phi_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t^*} = & \\
& -p_{s\phi}^* \nabla^* \phi_1 - p_{sT}^* \nabla^* T_1 + \frac{\mathbf{v}}{St^{1/2}} \nabla^{2*} \mathbf{v}_1 \\
& -\phi_0 \delta \nabla^* p_{f1} + \phi_0 \frac{1}{St^{1/2}} \nabla^{2*} \mathbf{u}_1 \\
& + (1-\phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + (1-\phi_0) \frac{\beta_\phi^*}{St^{1/2}} \phi_1 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i} \\
& + C\delta \phi_0 \frac{\partial}{\partial t^*} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + C\delta \phi_0 \mathbf{u}_0^* \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}^*} - \phi_1 (1-\delta) \mathbf{i}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
(1-\phi_0) \delta \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t^*} + \mathbf{u}_0^* \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}^*} \right) = & \\
& -(1-\phi_0) \delta \nabla^* p_{f1} + \frac{(1-\phi_0)}{St^{1/2}} \nabla^{2*} \mathbf{u}_1 \\
& - (1-\phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) - (1-\phi_0) \frac{\beta_\phi^*}{St^{1/2}} \phi_1 \mathbf{u}_0^* \mathbf{i} - C\delta \phi_0 \frac{\partial}{\partial t^*} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) - C\delta \phi_0 \mathbf{u}_0^* \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}^*}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \phi_0 \frac{\partial T_1}{\partial t^*} = & \\
& [-p_{s0}^* \mathbf{I}] : \nabla^* \mathbf{v}_1 + \frac{\lambda}{St^{1/2}} \nabla^{*2} T_1 - \Gamma_{d\phi}^* \phi_1 - \Gamma_{dT}^* T_1 + \Gamma_{s\phi}^* \phi_1 + \Gamma_{sT}^* T_1 + \Gamma_{su}^* \mathbf{u}_1 + \Gamma_{sv}^* \mathbf{v}_1
\end{aligned} \tag{5.42}$$

A obtenção das derivadas do termo fonte  $\Gamma_{s\phi}^*$ ,  $\Gamma_{sT}^*$ ,  $\Gamma_{su}^*$ ,  $\Gamma_{sv}^*$  encontra-se discutida no Apêndice B.

## 5.5 A matriz final

Representam-se as perturbações dadas na seção anterior por:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ p_{f1} \\ \mathbf{u}_{1\parallel} \\ \mathbf{u}_{1\perp} \\ \mathbf{v}_{1\parallel} \\ \mathbf{v}_{1\perp} \\ T_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1m} \\ p_{f1m} \\ \mathbf{u}_{1m\parallel} \\ \mathbf{u}_{1m\perp} \\ \mathbf{v}_{1m\parallel} \\ \mathbf{v}_{1m\perp} \\ T_{1m}^* \end{bmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}^* + \sigma t} = \psi e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}^* + \sigma t} \quad (5.43)$$

Onde o subscrito “m” refere-se a valores constantes de amplitude. As componentes do vetor número de onda “ $\mathbf{k}$ ” são dadas por:

$$\begin{aligned} k_{\perp} &= k \cos(\theta) \\ k_{\parallel} &= k \sin(\theta) \end{aligned} \quad (5.44a, b)$$

Na equação anterior, “ $\theta$ ” é o ângulo definido em relação à horizontal.

As demais variáveis de (5.43) seguem as definições dadas na Seção 3.9.

A substituição da equação (5.43) no conjunto de equações diferenciais parciais lineares (Eqs. 5.38 a 5.42) resulta no seguinte problema de autovalor:

$$(L - \sigma N)\psi = 0 \quad (5.45)$$

Onde “ $\psi$ ” é o vetor de amplitudes definido em (5.43).

Reagrupando as matrizes “L” e “N”:

$$A\psi = 0 \quad (5.46)$$

A matriz “A” é uma matriz de dimensões  $7 \times 7$ , cujos elementos são apresentados a seguir:

$$A_{11} = \sigma$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{13} = 0$$

$$A_{14} = 0$$

$$A_{15} = i k \sin(\theta) \phi_0$$

$$A_{16} = i k \cos(\theta) \phi_0$$

$$A_{17} = 0$$

$$A_{21} = -\sigma - u_0^* i k \sin(\theta)$$

$$A_{22} = 0$$

$$A_{23} = (1 - \phi_0) i k \sin(\theta)$$

$$A_{24} = (1 - \phi_0) i k \cos(\theta)$$

$$A_{25} = 0$$

$$A_{26} = 0$$

$$A_{27} = 0$$

$$A_{31} = -p_{s\phi}^* i k \sin(\theta) + (1 - \phi_0) \frac{\beta_0^* u_0^*}{St^{1/2}} - (1 - \delta)$$

$$A_{32} = -\phi_0 i \delta k \sin(\theta)$$

$$A_{33} = -\phi_0 \frac{k^2}{St^{1/2}} + (1 - \phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} + C \delta \phi_0 \sigma + C \delta \phi_0 u_0^* i k \sin(\theta)$$

$$A_{34} = 0$$

$$A_{35} = -\phi_0 \sigma - \frac{v}{St^{1/2}} k^2 - (1 - \phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} - C \delta \phi_0 \sigma$$

$$A_{36} = 0$$

$$A_{37} = -p_{sT}^* i k \sin(\theta)$$

$$A_{41} = -p_{s\phi}^* i k \cos(\theta)$$

$$A_{42} = -\phi_0 i \delta k \cos(\theta)$$

$$A_{43} = 0$$

$$A_{44} = -\phi_0 \frac{k^2}{St^{1/2}} + (1 - \phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} + C \delta \phi_0 \sigma + C \delta \phi_0 u_0^* i k \sin(\theta)$$

$$A_{45} = 0$$

$$A_{46} = -\phi_0 \sigma - \frac{v}{St^{1/2}} k^2 - (1 - \phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} - C \delta \phi_0 \sigma$$

$$A_{47} = -p_{sT}^* i k \cos(\theta)$$

$$A_{51} = -(1 - \phi_0) \frac{\beta_\phi^* u_0^*}{St^{1/2}}$$

$$A_{52} = -(1 - \phi_0) \delta i k \sin(\theta)$$

$$A_{53} = \left[ \begin{aligned} &-(1 - \phi_0) \delta (\sigma + u_0^* i k \sin(\theta)) - \frac{(1 - \phi_0)}{St^{1/2}} k^2 \\ &-(1 - \phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} - C \delta \phi_0 \sigma - C \delta \phi_0 u_0^* i k \sin(\theta) \end{aligned} \right]$$

$$A_{54} = 0$$

$$A_{55} = (1 - \phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} + C \delta \phi_0 \sigma$$

$$A_{56} = 0$$

$$A_{57} = 0$$

$$A_{61} = 0$$

$$A_{62} = -(1 - \phi_0) \delta i k \cos(\theta)$$

$$A_{63} = 0$$

$$A_{64} = \left[ \begin{array}{l} -(1 - \phi_0) \delta (\sigma + u_0^* i k \sin(\theta)) - \frac{(1 - \phi_0)}{St^{1/2}} k^2 \\ - (1 - \phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} - C \delta \phi_0 \sigma - C \delta \phi_0 u_0^* i k \sin(\theta) \end{array} \right]$$

$$A_{65} = 0$$

$$A_{66} = (1 - \phi_0) \frac{\beta_0^*}{St^{1/2}} + C \delta \phi_0 \sigma$$

$$A_{67} = 0$$

$$A_{71} = (\Gamma_{s\phi}^* - \Gamma_{d\phi}^*)$$

$$A_{72} = 0$$

$$A_{73} = \Gamma_{sw^2}^* \cdot 2u_0^* \left( 1 - \left( \frac{1 - \phi_{mf}}{1 - \phi_0} \right)^{n-1} \right)$$

$$A_{74} = 0$$

$$A_{75} = -p_{s0}^* i k \sin(\theta) - \Gamma_{sw^2}^* \cdot 2u_0^* \left( 1 - \left( \frac{1 - \phi_{mf}}{1 - \phi_0} \right)^{n-1} \right)$$

$$A_{76} = -p_{s0}^* i k \cos(\theta)$$

$$A_{77} = -\frac{3}{2} \phi_0 \sigma - \frac{\lambda}{St^{1/2}} k^2 - \Gamma_{dT}^* + \Gamma_{sT}^*$$

Conforme discutido na Seção 3.8, os valores do parâmetro temporal “ $\sigma$ ” são obtidos

a partir de:

$$\mathbf{det}(A) = 0 \quad (5.47)$$

A resolução da Eq. (5.47) resulta em uma equação polinomial de quinta ordem em “ $\sigma$ ”, cujas raízes determinam os possíveis modos de propagação das instabilidades. A forma final para a equação polinomial e suas raízes é relativamente extensa e será omitida no presente trabalho. De forma concisa, os modos de propagação são dados por:

$$\sigma = \sigma(\phi_0, \delta, St, k, \theta) \quad (5.48)$$

Por fim, deve ser observado que o análogo da Equação (5.48) para o modelo isotérmico é obtido ao suprimir-se a última linha e última coluna da matriz A. Nesta situação, a relação de dispersão equivalente à Equação (5.48) fornece uma equação polinomial de quarta ordem em “ $\sigma$ ”.



## **Capítulo 6**

### **Resultados**

#### **6.1 Introdução**

No presente capítulo apresenta-se os resultados—ou comportamento do parâmetro temporal “ $\sigma$ ” a partir das perturbações dadas pelas Eq. (5.33) a (5.37)—obtidos pelas aplicações dos modelos apresentados nos capítulos anteriores. Inicialmente serão discutidos os resultados referentes ao modelo isotérmico. Na Seção 6.3 serão discutidos os resultados referentes ao modelo não isotérmico. As Seções 6.4, 6.5 e 6.6 tratam da influência dos diversos parâmetros do modelo sobre as características de propagação dos distúrbios lineares. Nas Seções 6.7 e 6.8 serão apresentados os resultados obtidos utilizando as relações constitutivas para as propriedades da fase sólida dada pelos modelos de Buyevich (1994) e Koch e Sangani (1999). Finalizando, a Seção 6.9 ilustra uma comparação preliminar com os dados experimentais da literatura.

#### **6.2 Os modos isotérmicos de propagação**

Nas Figuras 6.1 e 6.2 apresentam-se algumas curvas típicas para as características de

propagação do distúrbio obtidas pela análise linear isotérmica. Nesta análise linear despreza-se o efeito da temperatura granular.

Tais curvas correspondem à raiz com maior valor real “ $\sigma_r$ ” e respectiva parte complexa “ $\sigma_i$ ” do polinômio de ordem 4<sup>18</sup>. O ponto correspondente ao máximo valor de “ $\sigma_r$ ” é denominado “ $\sigma_{rmax}$ ” e o respectivo valor do número de onda do distúrbio “ $k_{max}$ ”.<sup>19</sup>

Em termos físicos, “ $\sigma_{rmax}$ ” representa o valor máximo do fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio.

De forma similar, “ $\sigma_{imax}$ ” define a frequência temporal de oscilação do distúrbio quando este atinge o máximo de seu fator de crescimento com o tempo.

Na Figura 6.1 observa-se que a curva mais instável (i.e. com maior valor de  $\sigma_{rmax}$ ) corresponde à propagação de distúrbio na direção vertical (i.e.  $\theta = 90^\circ$ ), ou seja para frentes de ondas paralelas ao distribuidor do leito. Para os ângulos entre 0 e 90 graus (exemplo na figura de 30 e 60 graus), o valor máximo do fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio é menor que o obtido para  $\theta = 90^\circ$ , bem como o respectivo valor de “ $k_{max}$ ”. Para a propagação na direção horizontal (i.e.  $\theta = 0^\circ$ ) observa-se que o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio contra o tempo decresce e portanto levando à estabilidade ( $\sigma_r < 0$ ). Tal comportamento foi verificado experimentalmente em leitos fluidizados por líquido para leitos operando com velocidades superficiais entre a de mínima fluidização e a de mínimo borbulhamento (Anderson e Jackson, 1969). Essa resposta é de difícil constatação experimental em leito fluidizado por gás, dado o pequeno intervalo entre a velocidade superficial de mínima fluidização e a de mínimo borbulhamento.

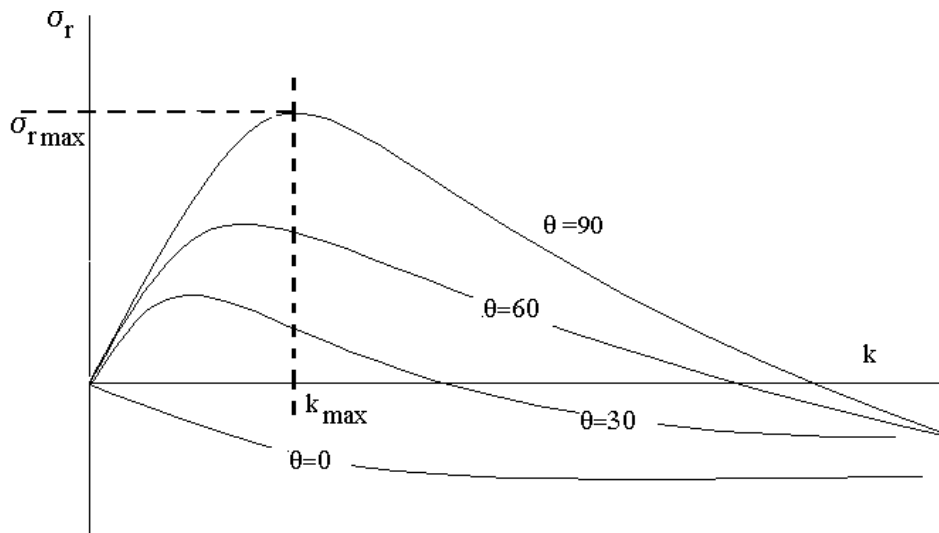
---

<sup>18</sup> Tal polinômio é obtido ao efetuar-se a operação, definida em (5.49), desprezando-se a equação de balanço da temperatura granular.

<sup>19</sup> Conforme capítulos 3 e 5, deve ser lembrado que os parâmetros anteriores surgem da representação das perturbações na forma  $\psi_1 = \psi e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^* + \sigma t}$ . A forma anterior representa uma onda cuja direção de propagação é dada pelo produto escalar  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^*$ , apresentando caráter oscilatório no espaço e no tempo, e caráter de crescimento no tempo

Na Figura 6.2 encontra-se ilustrado o comportamento das frequências da onda de distúrbios. Tais valores crescem com o ângulo “ $\theta$ ” de propagação em relação à horizontal. Ainda, verifica-se que a instabilidade na direção horizontal é não oscilatória no tempo (i.e.  $\sigma_i = 0$ ).

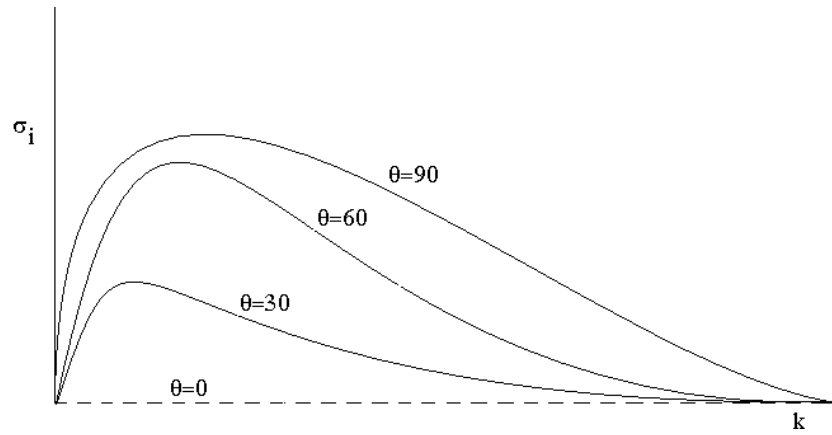
Como será visto nas próximas seções, o comportamento das curvas descrito pelas Figuras 6.1 e 6.2 pode variar sensivelmente com os valores de viscosidade e de pressão da fase sólida, bem como dos parâmetros utilizados para o modelo não isotérmico.



**Figura 6.1 Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio contra o respectivo número de onda (caso típico)**

---

dado pela parte real “ $\sigma_r$ ” de “ $\sigma$ ”.



**Figura 6.2 – Frequência da onda de distúrbio contra o respectivo número de onda (caso típico)**

Os valores descritos pelas curvas anteriores foram calculados numericamente como função do ângulo “ $\theta$ ”, do Número de Stokes, da fração de sólidos correspondente ao estado básico e para um valor típico de razão de densidades entre as fases<sup>20</sup>. Nas Figuras 6.3 a 6.6 encontram-se apresentados os resultados para o fator de crescimento máximo da amplitude “ $\sigma_{\text{max}}$ ” em função de “ $\theta$ ” e do Número de Stokes.

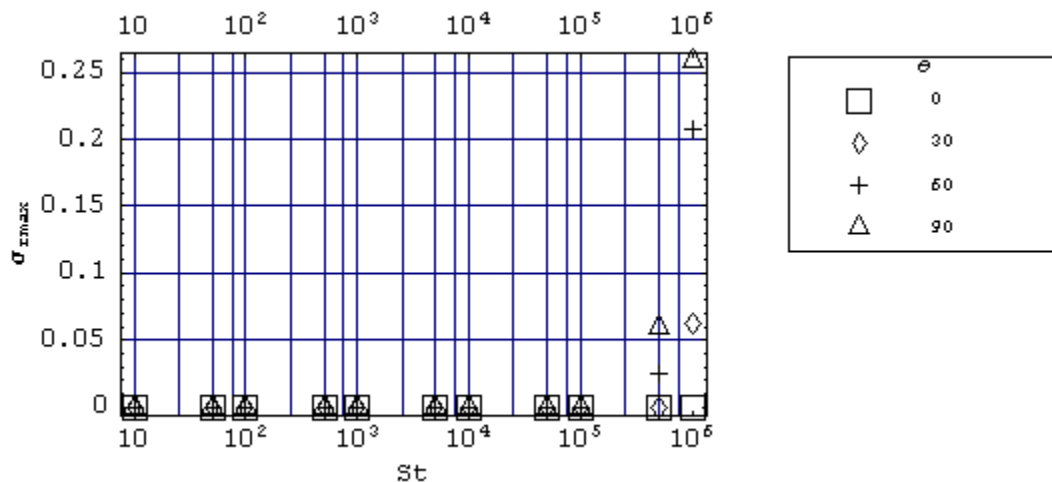
---

<sup>20</sup> Foram adotados valores constantes para os seguintes parâmetros: fração de sólidos correspondente a mínima fluidização ( $\phi_f = 0.57$ ), fração de sólidos correspondente ao máximo empacotamento ( $\phi_m = 0.63$ ), expoente da equação de Richardson e Zaki ( $n = 4.0$ ).

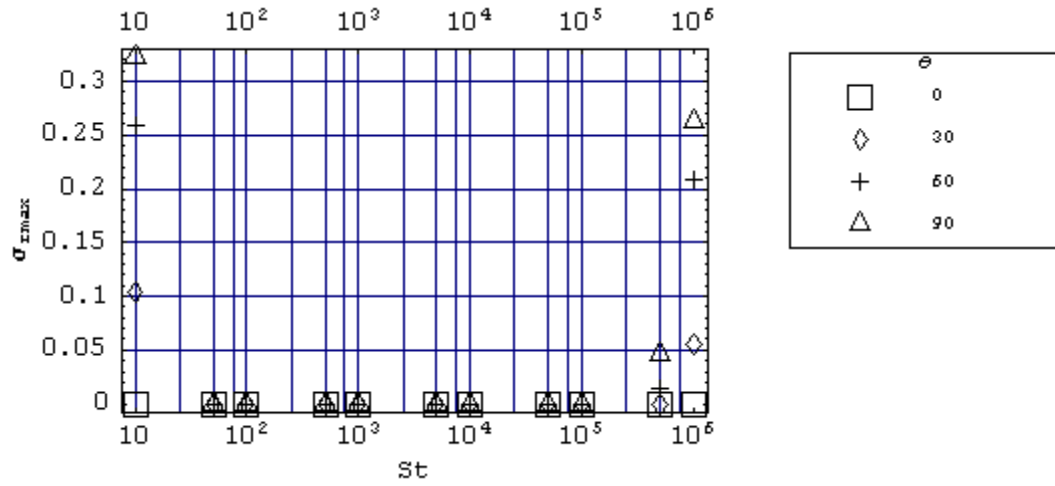
A Figura 6.3 mostra a existência de uma região de estabilidade, válida para uma ampla faixa de números de Stokes e valores do ângulo “ $\theta$ ”. Como se vê, maior nível de instabilidade deve ocorrer para valores elevados de Número de Stokes ( $10^5$ ) e para direções de propagação próximas à vertical. De fato, o comportamento descrito nesta figura está em concordância com o da Figura 6.1.

Deve ser observado, contudo, em casos de fluidização por líquido, ou seja, em baixos números de Stokes, os sistemas são mais estáveis que os fluidizados por gás. Isto é confirmado experimentalmente (Anderson e Jackson, 1969). Entretanto, a existência de regiões de grande instabilidade para baixos números de Stokes (vide Figuras 6.4 a 6.6) sugere que o modelo não seja válido nesta região.

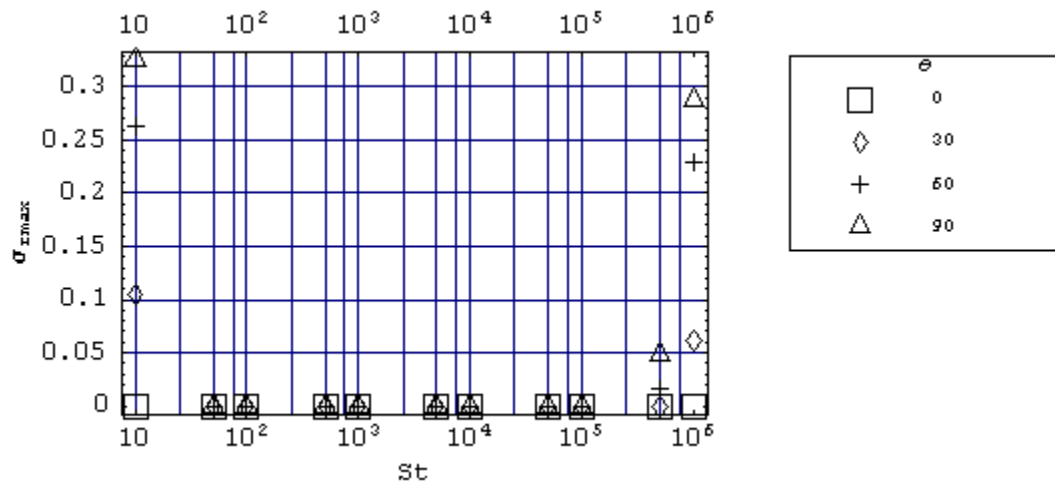
Uma comparação das Figuras mencionadas anteriormente evidencia o aumento do fator de crescimento da amplitude da instabilidade com o aumento da fração volumétrica de sólidos (ou diminuição da fração de vazios) no leito.



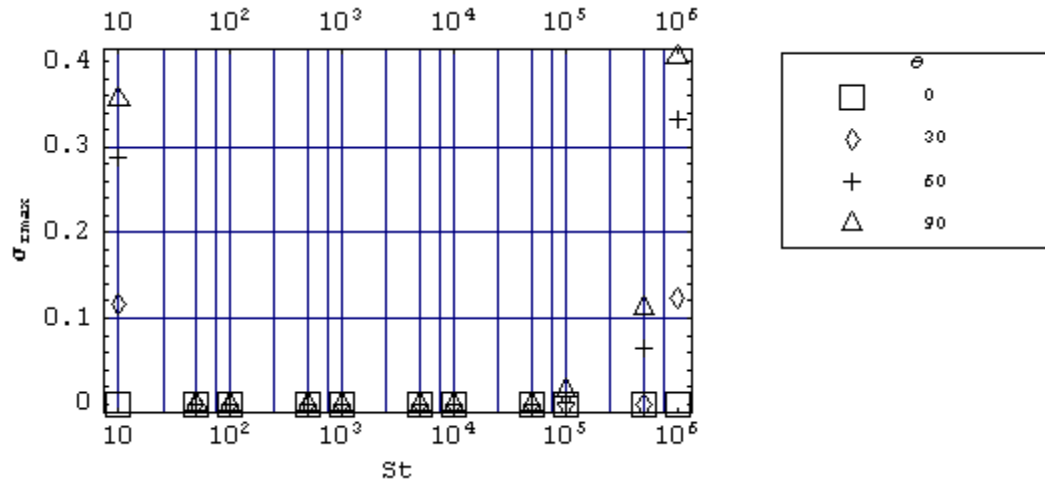
**Figura 6.3 Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.5$  e  $\delta = 0.0001$**



**Figura 6.4** Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.52$  e  $\delta = 0.0001$

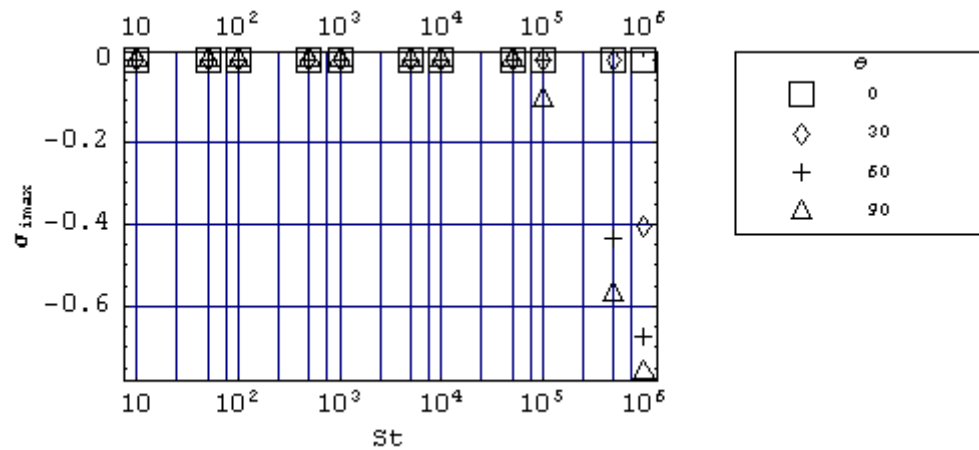


**Figura 6.5** Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.54$  e  $\delta = 0.0001$

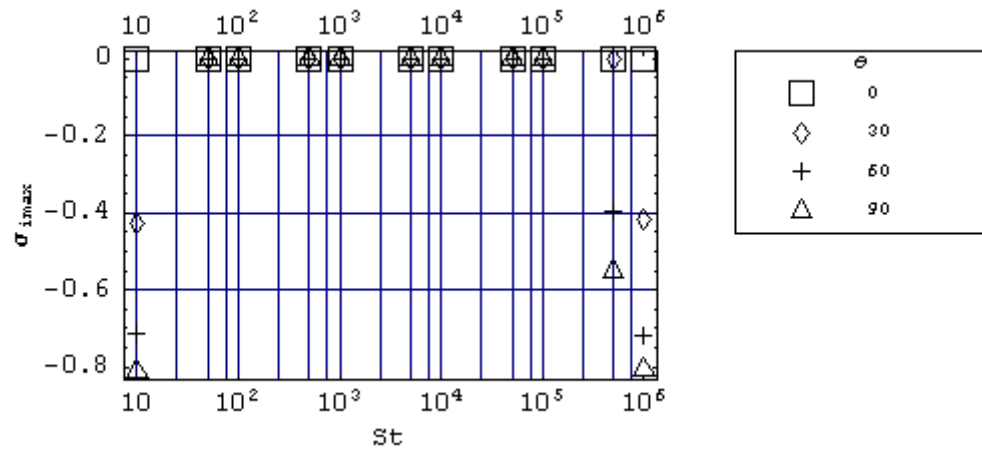


**Figura 6.6 Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.56$  e  $\delta = 0.0001$**

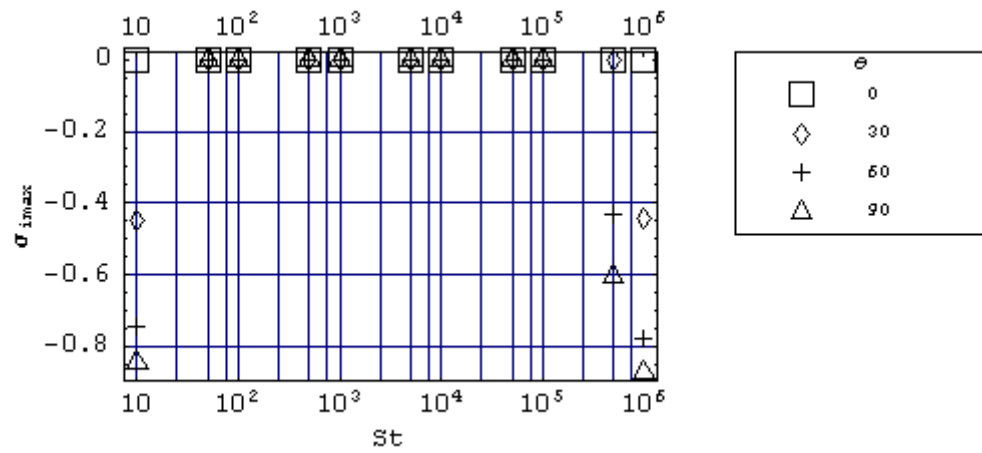
As Figuras 6.7 a 6.10 ilustram o comportamento da frequência da onda de distúrbio “ $\sigma_{\text{imax}}$ ”. A análise das figuras indica máximos valores para a direção vertical. As figuras também sugerem um ligeiro aumento da frequência da onda de distúrbio dominante com o aumento da fração de sólidos.



**Figura 6.7 Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.5$  e  $\delta = 0.0001$**

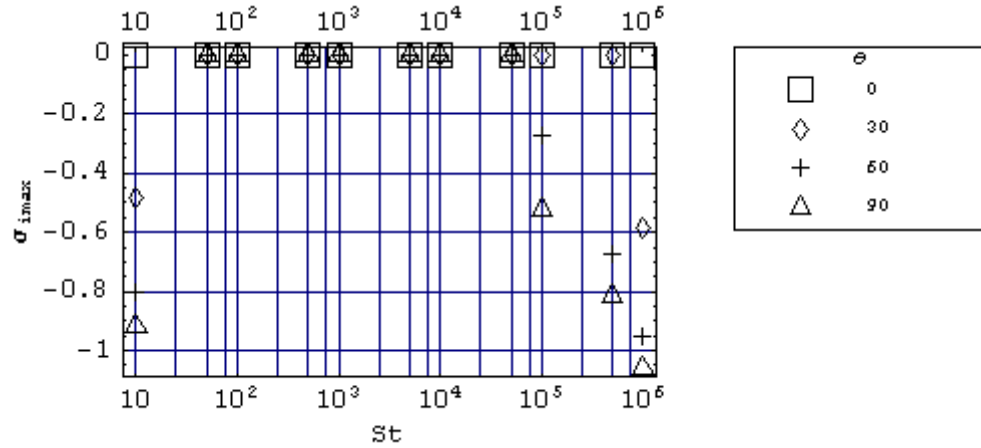


**Figura 6.8 - Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.52$  e  $\delta = 0.0001$**



**Figura 6.9 Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.54$  e  $\delta = 0.0001$**





**Figura 6.10** Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.56$  e  $\delta = 0.0001$

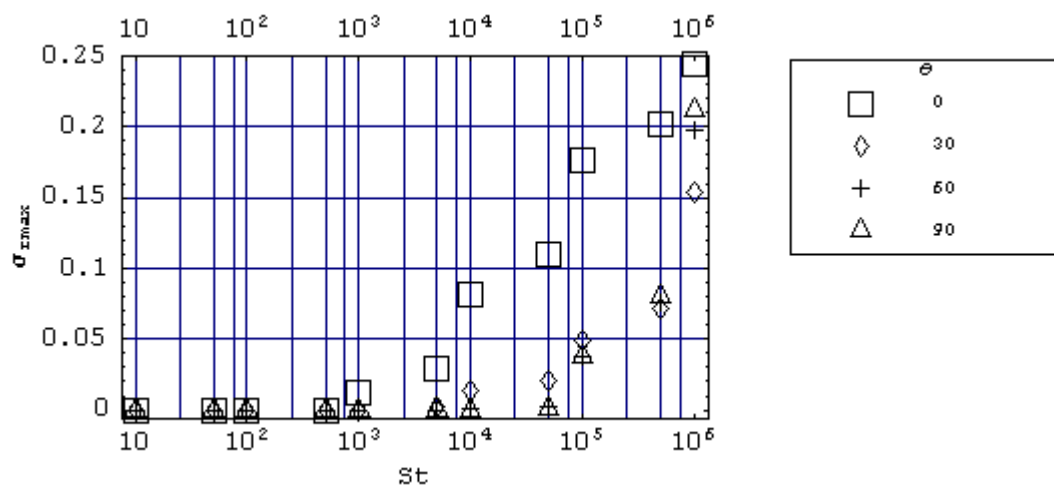
### 6.3 O efeito da temperatura granular

Nesta seção será apresentado o efeito da introdução da temperatura granular sobre as características de propagação dos distúrbios lineares em sistemas fluidizados. Os valores paramétricos são os mesmos utilizados no modelo isotérmico.

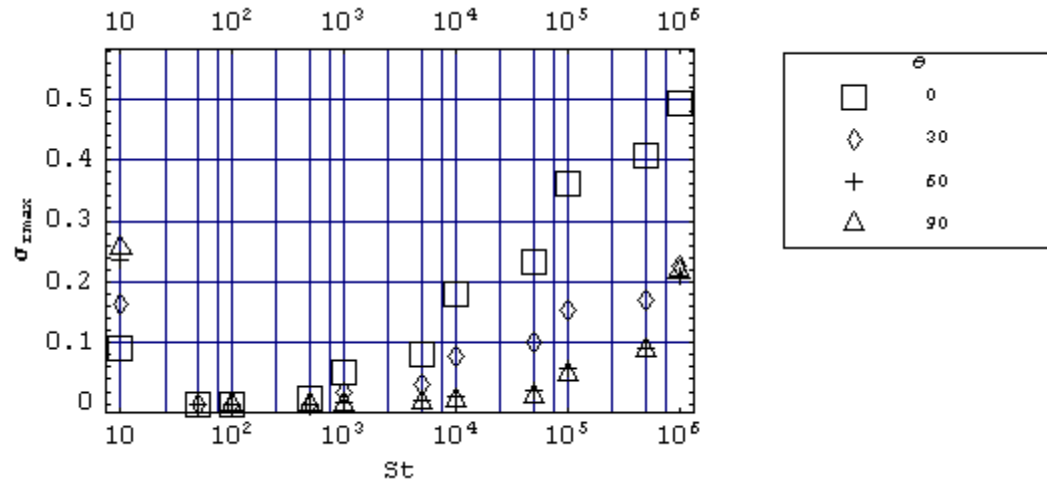
As Figuras 6.11 a 6.14 ilustram o comportamento do fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio “ $\sigma_{\text{max}}$ ”. A Figura 6.11 indica a existência de uma região estável para valores baixos do Número de Stokes. Revela, também, que para Números de Stokes elevados, há uma tendência de maiores fatores de crescimento da amplitude se os distúrbios forem provocados em direções próximas à horizontal. Isto é inédito e sugere que a introdução da temperatura granular na análise de estabilidade linear forneça um novo mecanismo para a formação de instabilidades secundárias e de bolhas observadas experimentalmente por El-Kaissy e Homsy, (1976); e Didwania e Homsy, (1981). Comparando com o padrão de ondas planas verticais descritas na seção anterior (vide Figuras 6.1 e 6.2), tais instabilidades secundárias são caracterizadas por distorções transversais à direção de propagação.

As Figuras 6.11 a 6.14 mostram o aumento da instabilidade para situações de maiores frações de sólidos. Comparações com o modelo isotérmico revelam que, em geral, o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio é ligeiramente maior para a situação não isotérmica.

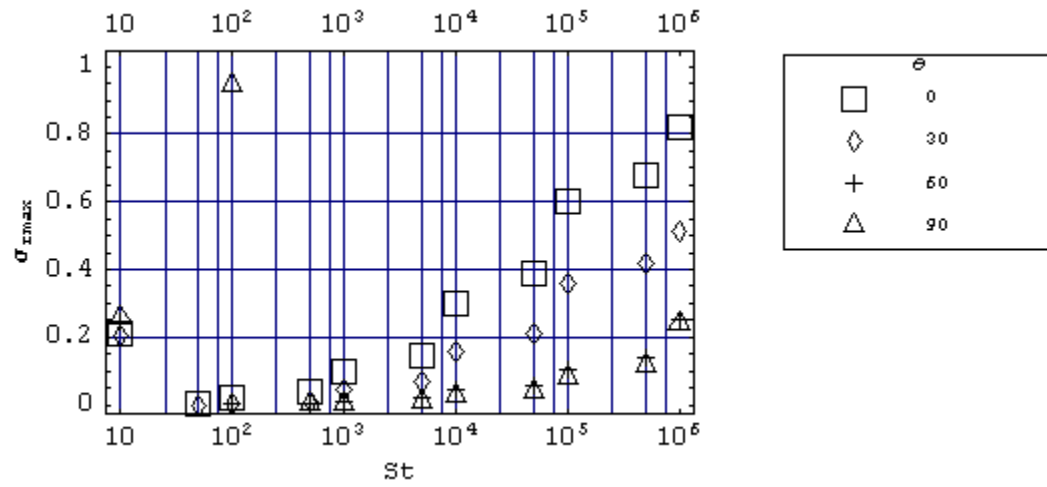
Deve-se observar que, similarmente ao modelo isotérmico, a existência de regiões mais instáveis para baixo Número de Stokes sugere uma restrição para o presente modelo.



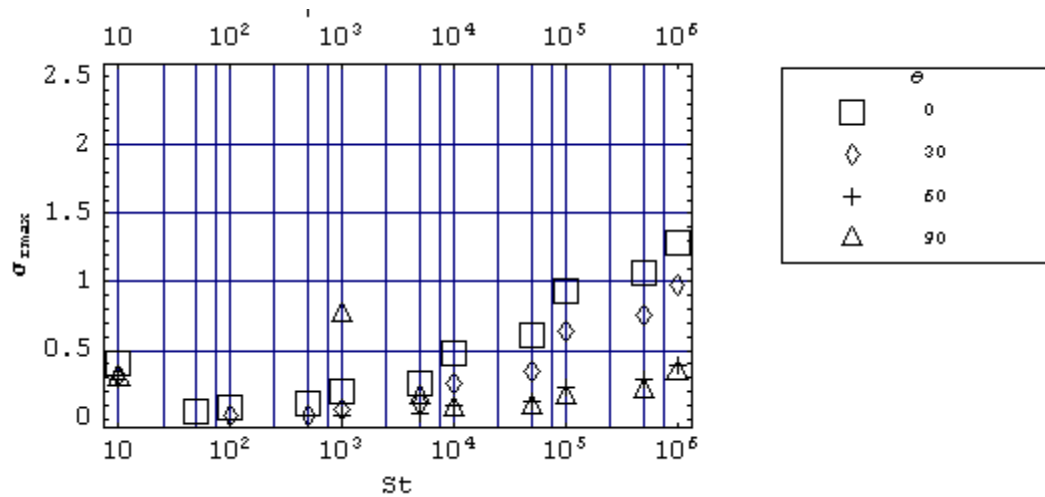
**Figura 6.11 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.5$  e  $\delta = 0.0001$**



**Figura 6.12- Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.52$  e  $\delta = 0.0001$**



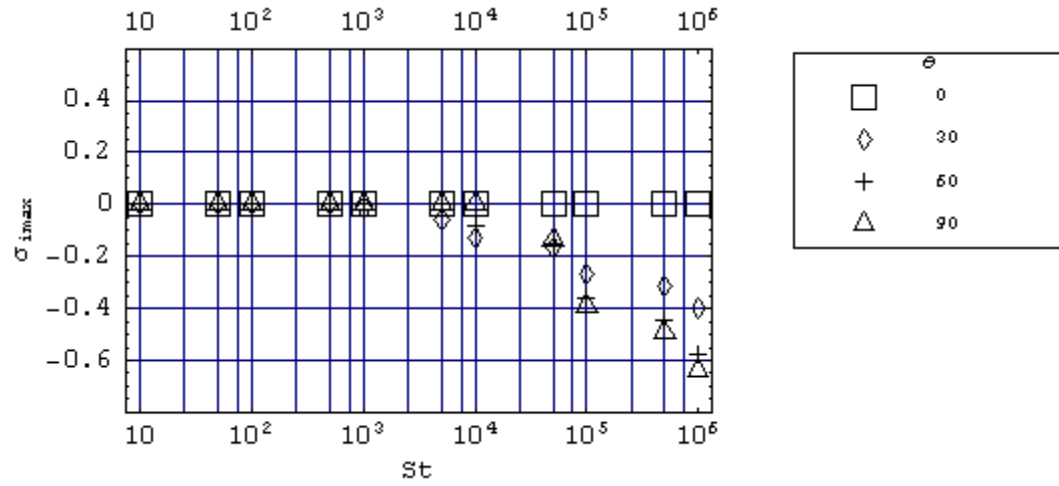
**Figura 6.13 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.54$  e  $\delta = 0.0001$**



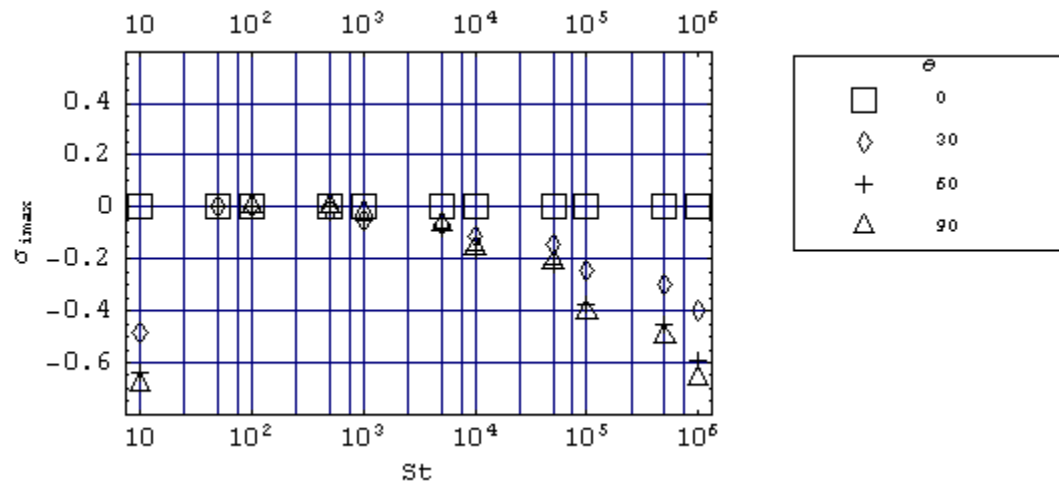
**Figura 6.14 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.56$  e  $\delta = 0.0001$**

As Figuras 6.15 a 6.18 apresentam os comportamentos da frequência da onda de distúrbio “ $\sigma_{\text{imax}}$ ” em relação ao Número de Stokes para várias situações. A Figura 6.15 indica que a maior frequência da onda de distúrbio corresponde à direção de propagação vertical. As Figuras 6.16 e 6.17 mostram que tal predominância também é observada para frações de sólidos maiores. O comportamento de aumento da frequência da onda de distúrbio dominante com aumento da fração de sólidos é verificado também na Figura 6.18.

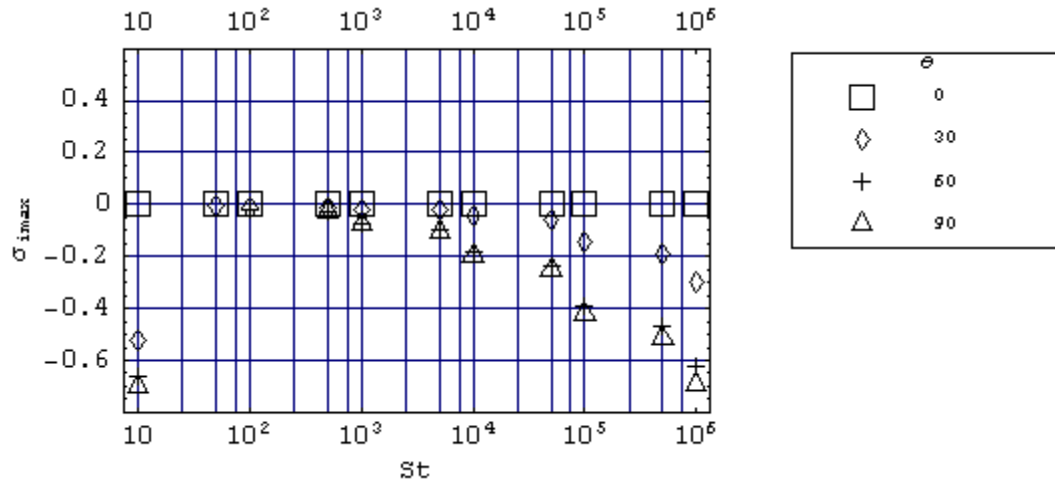
Da mesma forma que para a situação isotérmica, o caráter não oscilatório (i.e.  $\sigma_{\text{imax}}=0$ ) para os modos horizontais está presente neste caso.



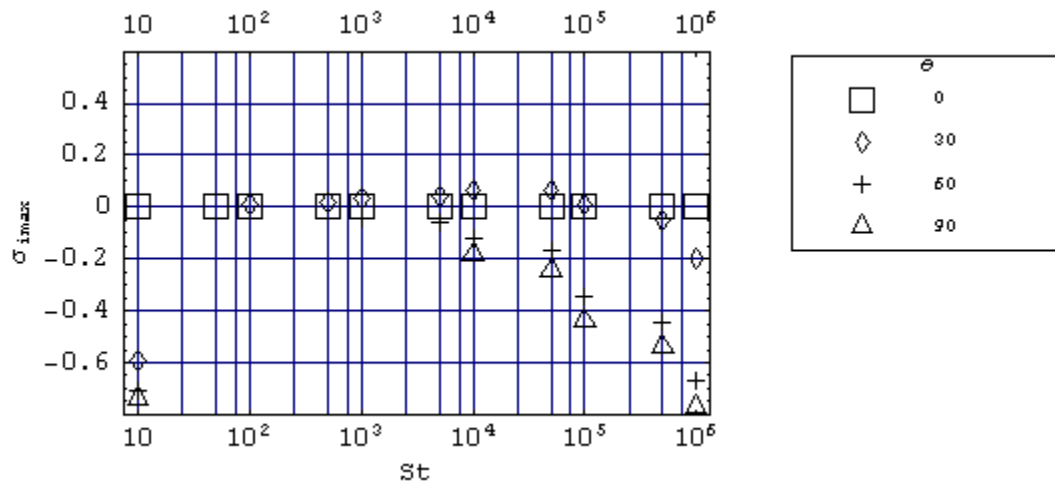
**Figura 6.15 – Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.5$  e  $\delta = 0.0001$**



**Figura 6.16 – Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.52$  e  $\delta = 0.0001$**



**Figura 6.17 - Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.54$  e  $\delta = 0.0001$**



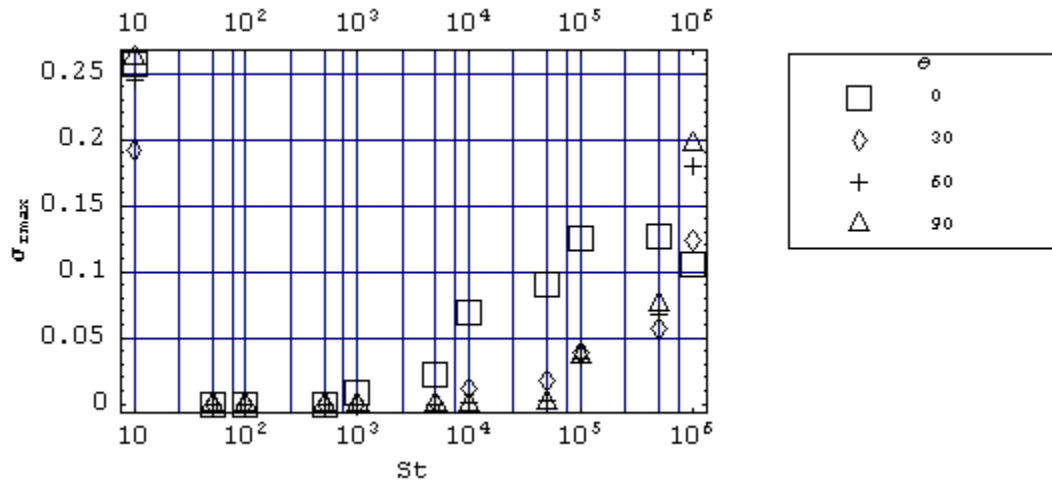
**Figura 6.18 - Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.56$  e  $\delta = 0.0001$**

No Apêndice D encontram-se ilustrados os comportamentos das instabilidades previstos pelos modelos isotérmicos e não isotérmicos.

## 6.4 O efeito da razão entre densidades das fases

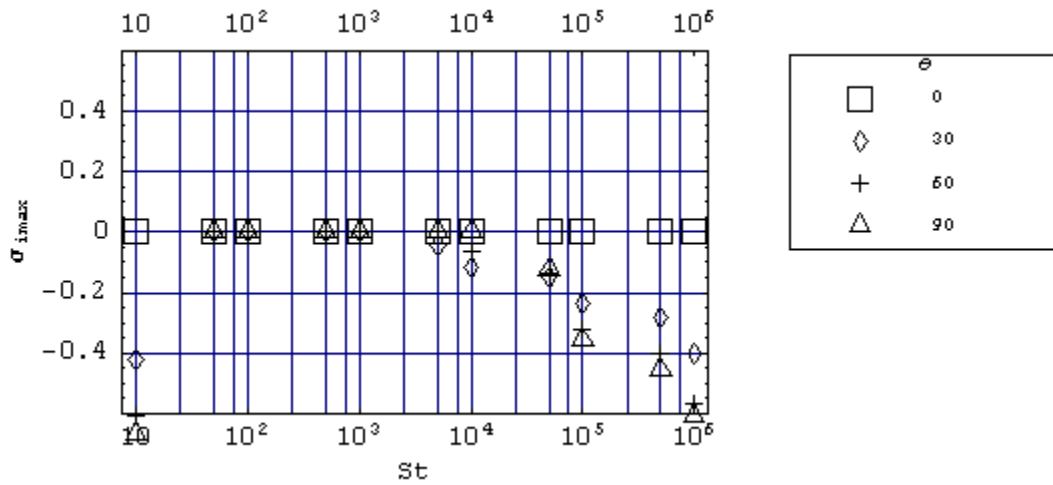
O efeito do aumento da razão de densidades sobre o modo de propagação não isotérmico é analisado nesta seção.

Uma comparação entre as Figuras 6.19 e 6.11 evidencia que para a faixa de Número de Stokes elevada ( $>10^4$ ), os fatores de crescimento de distúrbios decrescem para maiores razões de densidades. Isto é confirmado por verificações experimentais (Anderson e Jackson, 1969). Tais verificações mostram que os leitos de maior razão de densidade (e.g. leitos fluidizados por líquido) são mais estáveis que os leitos fluidizados de menor razão de densidade (e.g. leitos fluidizados por gás).



**Figura 6.19:** Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.5$  e  $\delta = 0.1$

A Figura 6.20 ilustra o efeito sobre a frequência da onda de distúrbio. Uma comparação com os resultados apresentados na Figura 6.15 revela a ausência de mudanças apreciáveis para a frequência da onda de distúrbio.

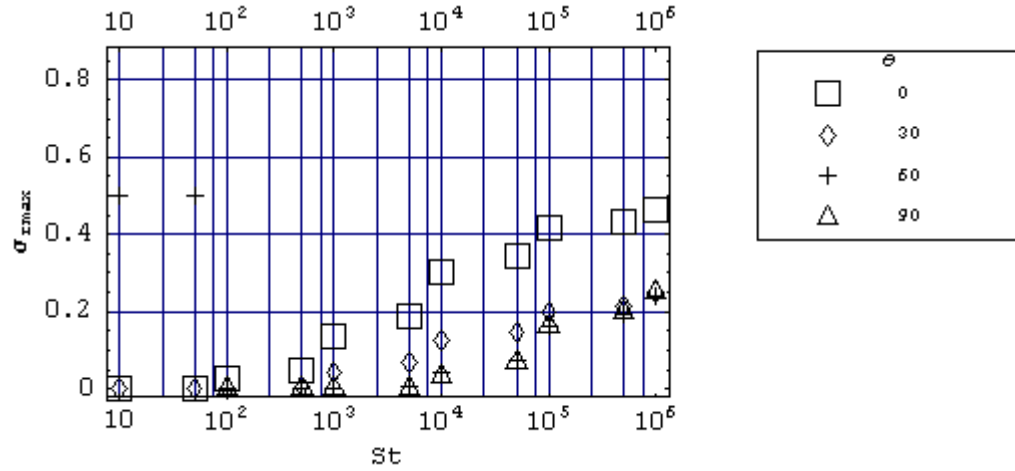


**Figura 6.20 - Frequência da onda de distúrbio para  $\phi_0 = 0.5$  e  $\delta = 0.1$**

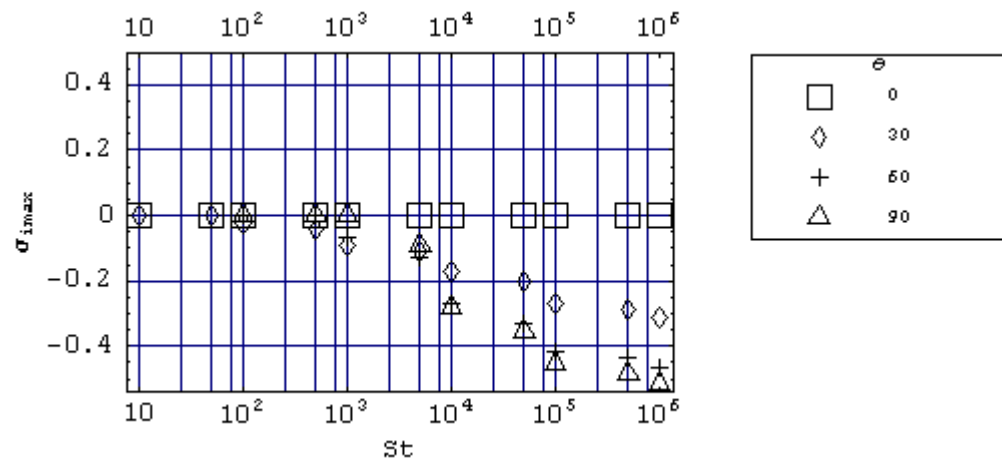
## 6.5 O efeito do coeficiente $n$ , mínima fluidização e máximo empacotamento

As Figuras 6.21 a 6.22 apresentam os resultados correspondentes à redução do coeficiente “ $n$ ”. A comparação da Figura 6.21 com a Figura 6.11 mostra que uma redução de “ $n$ ” implica em um aumento significativo da instabilidade. Uma comparação entre as Figuras 6.22 e 6.15 indica um pequeno aumento da frequência da onda de distúrbio na faixa de Número de Stokes entre  $10^4$  e  $10^6$ .





**Figura 6.21 – Efeito  $n = 2.0$  sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio**

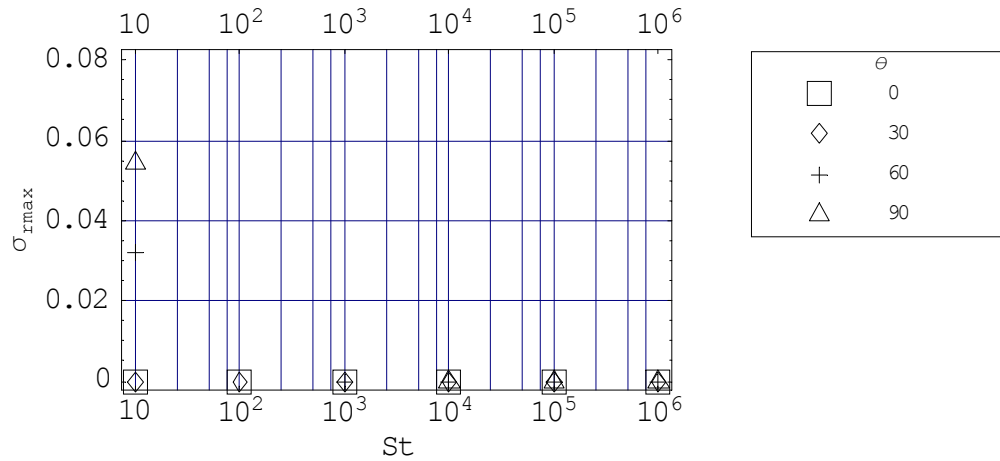


**Figura 6.22 – Efeito  $n = 2.0$  sobre a frequência da onda de distúrbio**

As Figuras 6.23 a 6.24 apresentam o efeito da alteração da fração de sólidos correspondente à mínima fluidização<sup>21</sup> “ $\phi_{mf}$ ”.

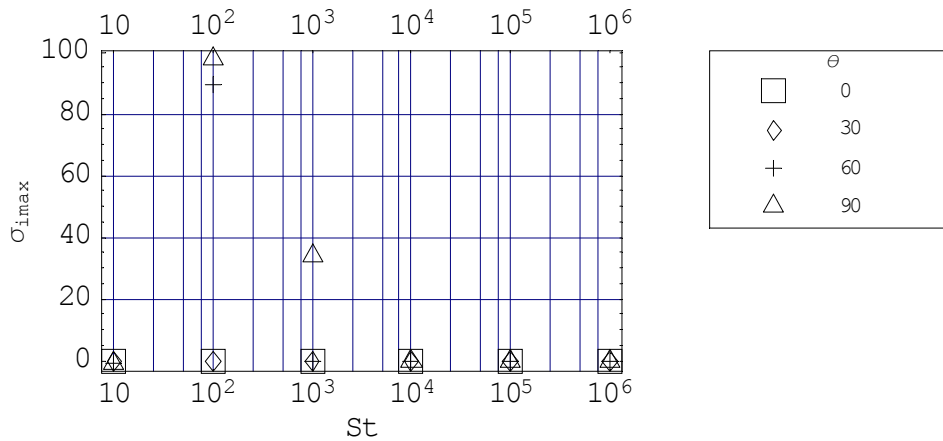
<sup>21</sup> Tal parâmetro surge no modelo devido ao termo fonte da equação de conservação da temperatura granular.

Comparando-se a Figura 6.23 com a Figura 6.11 ( $\phi_{mf} = 0.57$ ), verifica-se uma alteração qualitativa no comportamento da instabilidade. A análise da Figura 6.23 indica estabilidade no domínio  $St \times \theta$ .



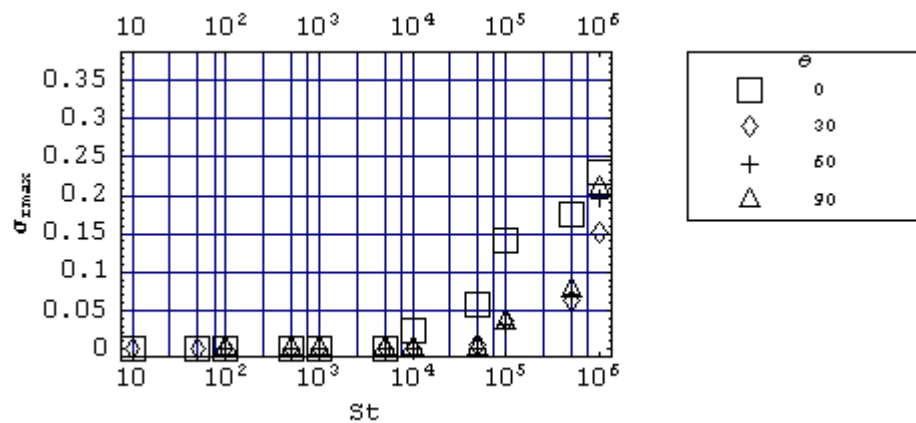
**Figura 6.23 – Efeito  $\phi_{mf} = 0.63$  sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio**

A Figura 6.24 ilustra a influência de “ $\phi_{mf}$ ” sobre a frequência da onda de distúrbio máxima. A comparação com a Figura 6.15 indica um decréscimo no valor do máximo número de onda do distúrbio e sua frequência.



**Figura 6.24 – efeito  $\phi_{mf} = 0.63$  sobre a frequência da onda de distúrbio**

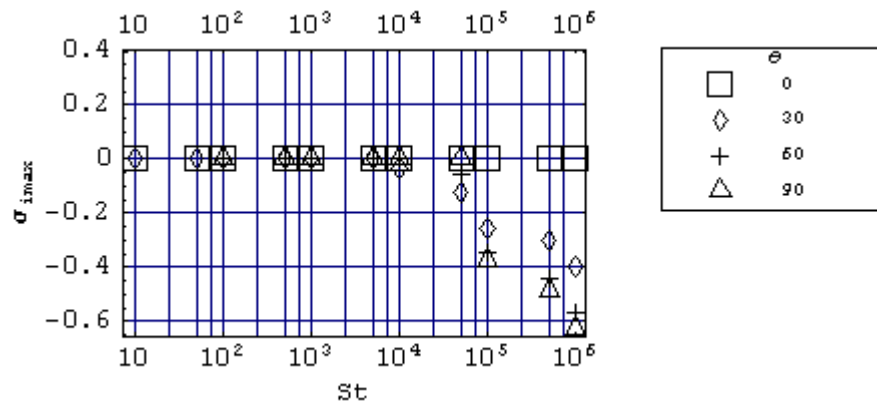
O efeito da fração de sólidos correspondente ao máximo empacotamento é ilustrado nas Figuras 6.25 e 6.26. A comparação com a Figura 6.1 indica um ligeiro decréscimo no valor do fator de crescimento da amplitude para valores de Número de Stokes elevados.



**Figura 6.25 – Efeito  $\phi_m = 0.6$  sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio**

Comparando as Figuras 6.15 e 6.26 verifica-se um pequeno aumento na frequência da onda

de distúrbio.



**Figura 6.26 – efeito  $\phi_m = 0.6$  sobre a frequência da onda de distúrbio**

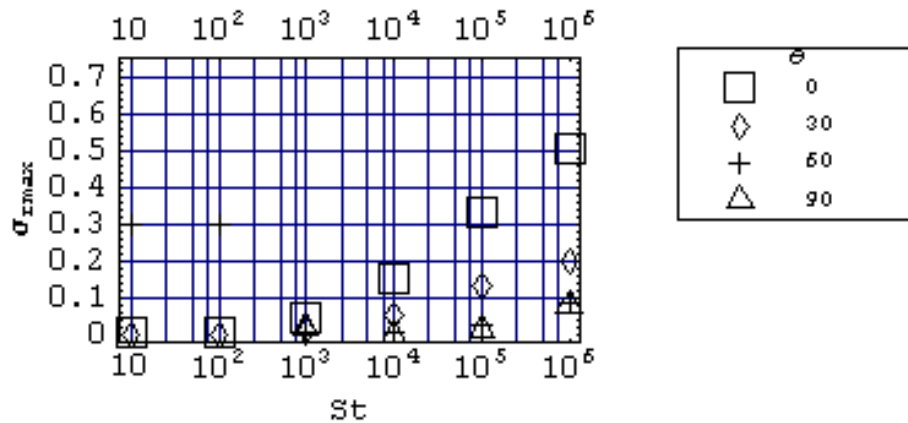
## 6.6 O efeito da condutividade

As Figuras 6.27 a 6.30 ilustram o efeito da condutividade térmica<sup>22</sup> sobre as características de propagação dos distúrbios não isotérmicos.

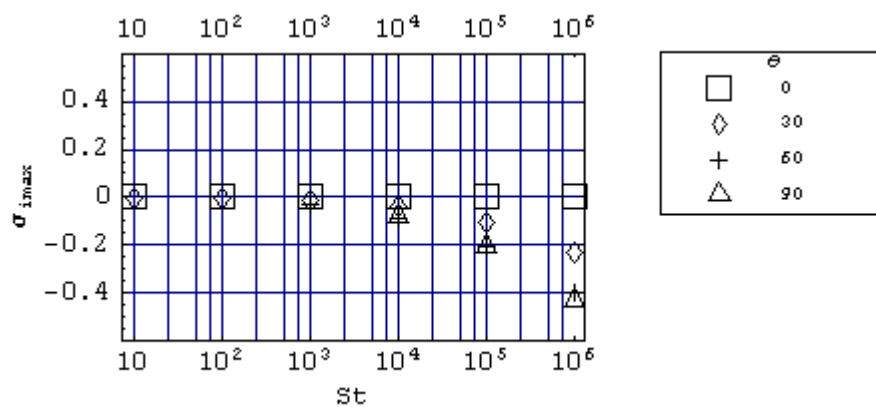
A Figura 6.27 sugere que baixas condutividades acentuam o crescimento da amplitude da onda de distúrbio da instabilidade. Em termos físicos, decréscimos na condutividade levam a distribuições menos homogêneas da temperatura granular no leito e, portanto acentuam o efeito não isotérmico, como ilustrado na Figura 6.21. Tal fato é novamente confirmado (vide Figura

<sup>22</sup> A terminologia refere-se à equação de conservação da temperatura granular. Deste modo condutividade térmica refere-se à condutividade utilizada nessa equação.

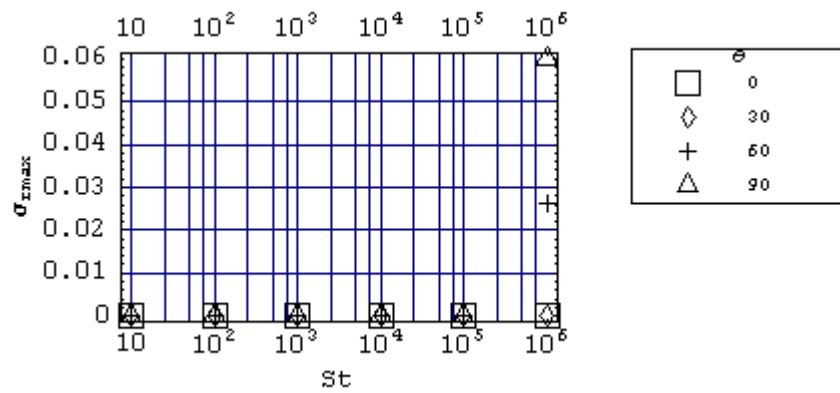
6.29) ao aumentar-se a condutividade, sugerindo o desaparecimento do distúrbio na direção horizontal e surgimento de distúrbio com característica similar à de propagação do distúrbio isotérmico (i.e. equivalente à situação de temperatura granular homogênea).



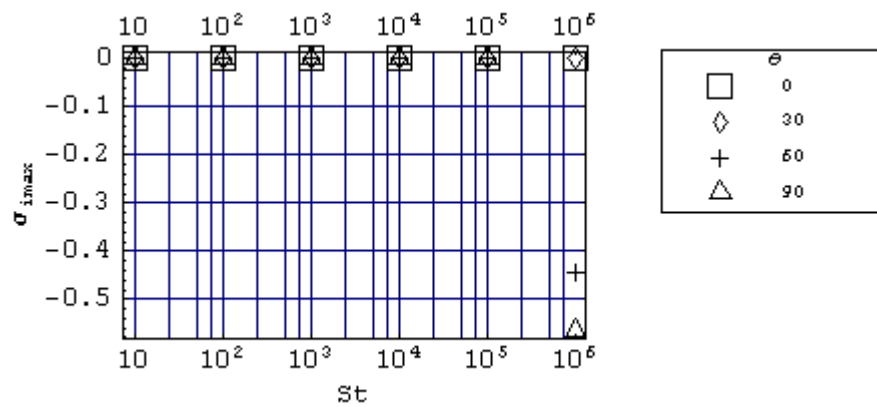
**Figura 6.27 – Efeito da condutividade nula sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio**



**Figura 6.28 – Efeito condutividade nula sobre a frequência da onda de distúrbio**



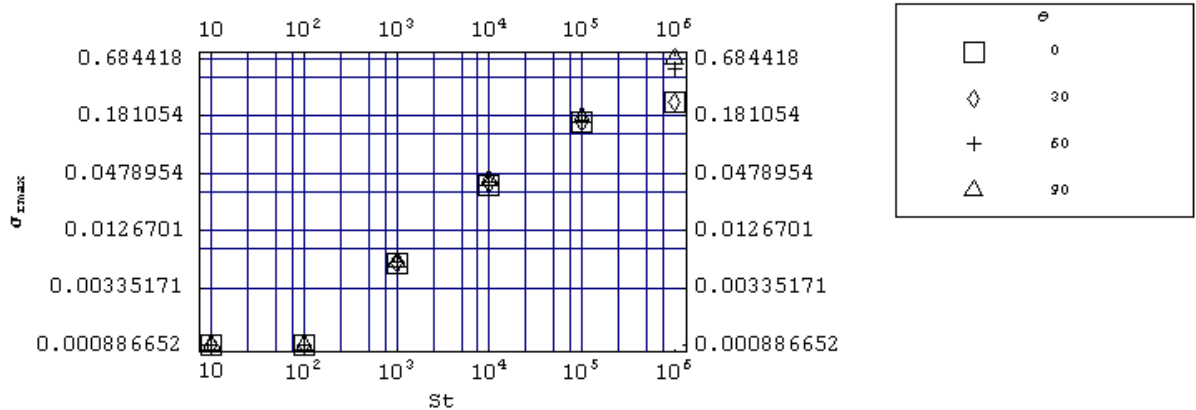
**Figura 6.29 – Efeito condutividade com vez maior sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio**



**Figura 6.30 – efeito aumento condutividade sobre a frequência da onda de distúrbio**

## 6.7 Resultados obtidos utilizando o modelo de Koch e Sangani

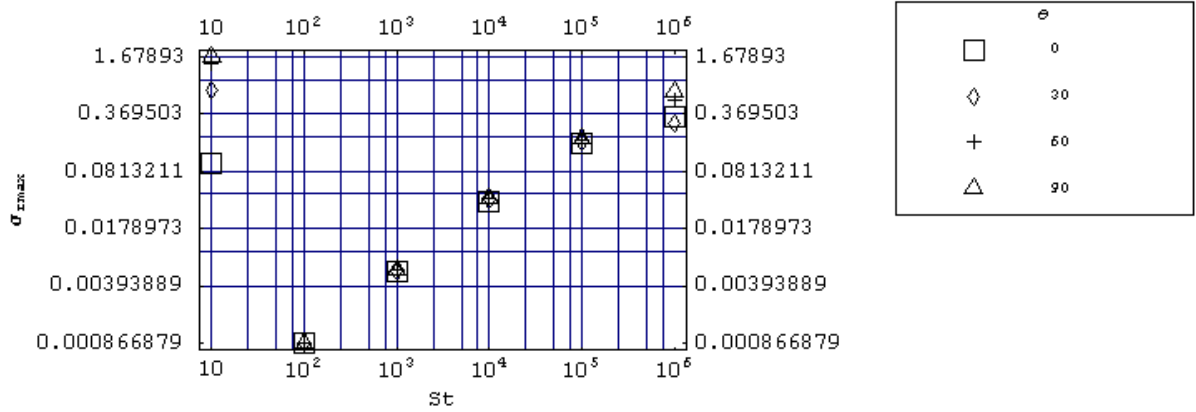
As Figuras 6.31 a 6.34 apresentam os resultados obtidos para o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio utilizando-se as relações constitutivas conforme o modelo de Koch e Sangani. Uma comparação com a Figura 6.11 indica um aumento em torno de dez vezes no fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio. A análise das Figuras 6.31 a 6.34, também, evidencia a possibilidade de ocorrência de isotropia para o modelo de Koch e Sangani. Em outras palavras, a independência do fator de crescimento de instabilidade com a direção do distúrbio.



**Figura 6.31 – Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Koch e Sangani  $\phi_0 = 0.5$ ,  $\delta = 0.0001$**

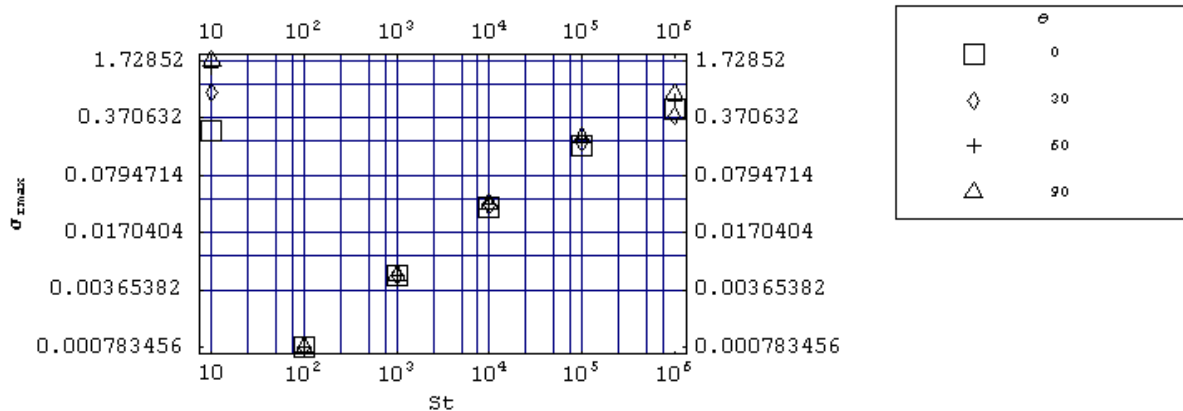
Conforme discussão anterior, o surgimento de instabilidades com fatores de crescimento elevados na região de Número de Stokes baixos (10-100) sugerem a inadequação do modelo nesta região.

Da mesma forma que os resultados do modelo proposto é observado um pequeno aumento do fator de crescimento com o aumento da fração de sólidos.

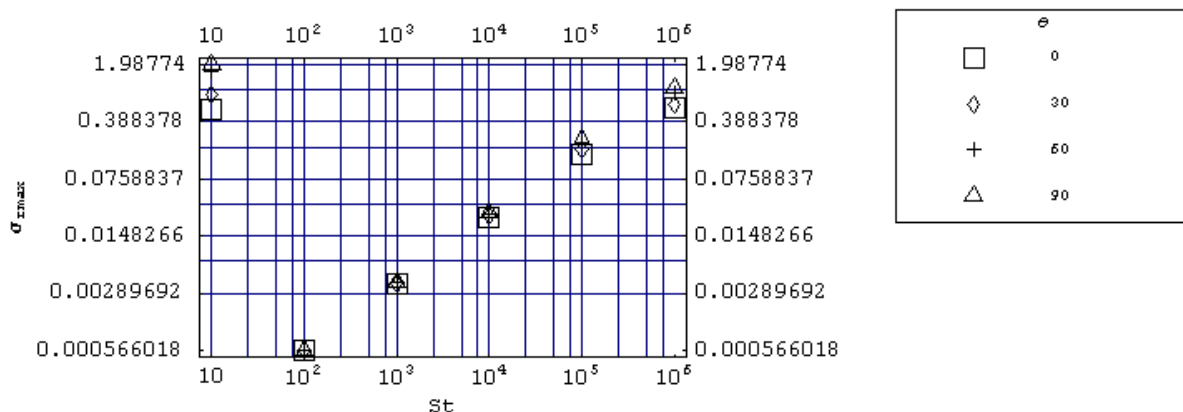


**Figura 6.32 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Koch e Sangani  $\phi_0 = 0.52$ ,  $\delta = 0.0001$**





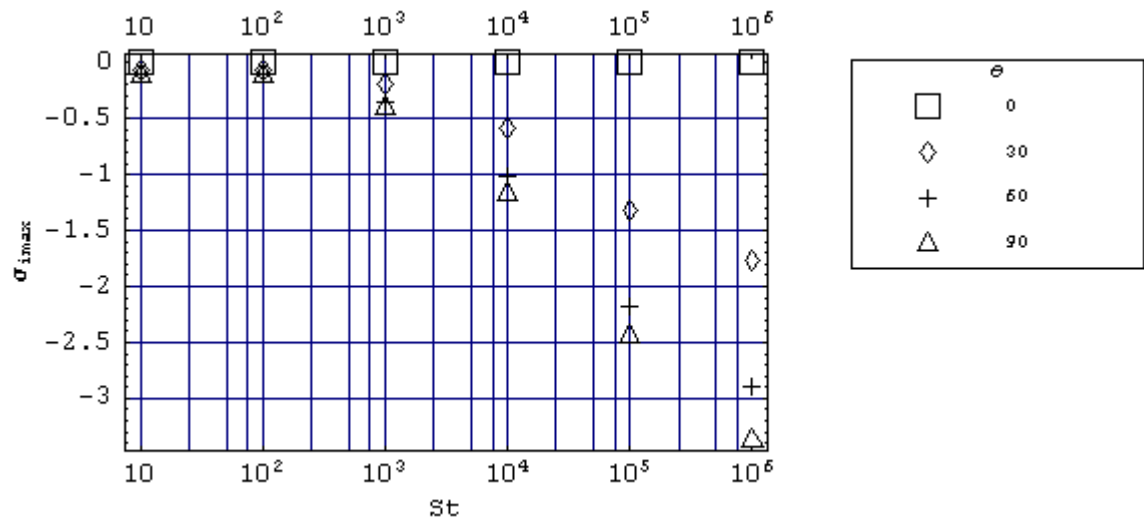
**Figura 6.33 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Koch e Sangani  $\phi_0=0.54$ ,  $\delta=0.0001$**



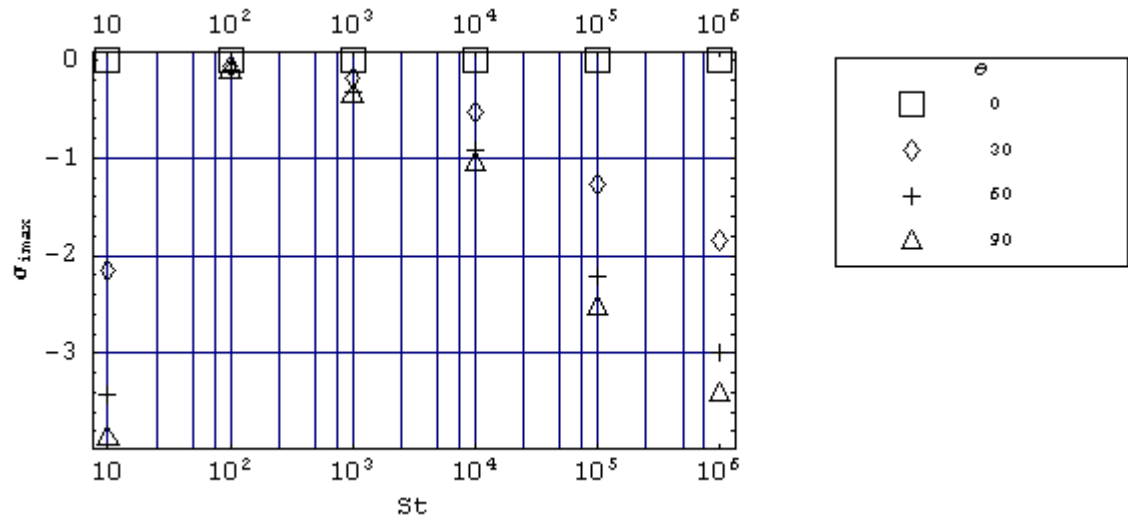
**Figura 6.34 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Koch e Sangani  $\phi_0=0.56$ ,  $\delta=0.0001$**

As Figuras 6.35 a 6.38 ilustram o comportamento da frequência da onda de distúrbio

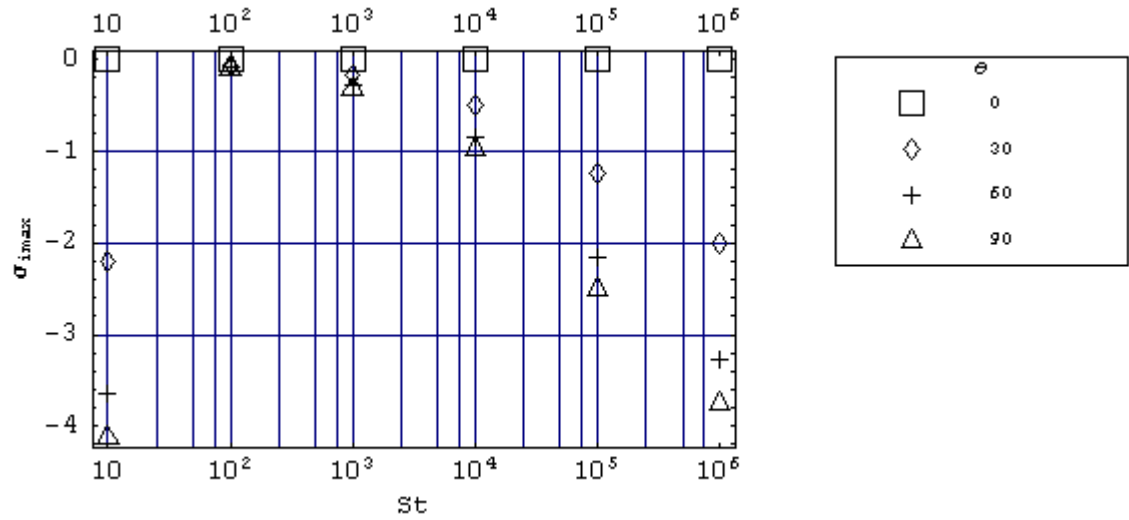
dominante. Uma comparação com as Figuras 6.15 a 6.18 indica que os valores são em geral inferiores aos do modelo proposto no presente trabalho.



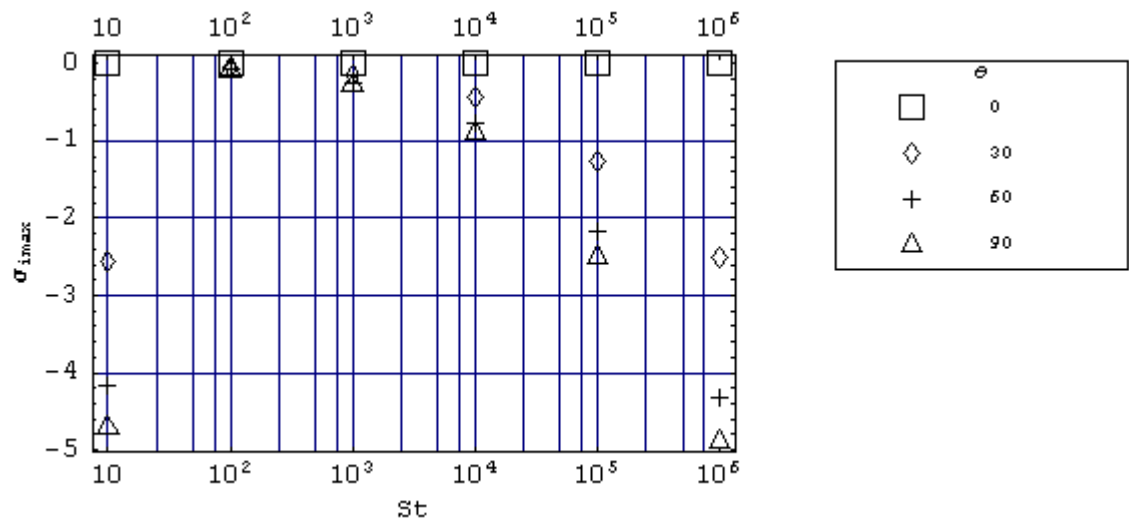
**Figura 6.35 – Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Koch e Sangani  $\phi_0 = 0.5$ ,  $\delta = 0.0001$**



**Figura 6.36 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Koch e Sangani  $\phi_0 = 0.52$ ,  $\delta = 0.0001$**



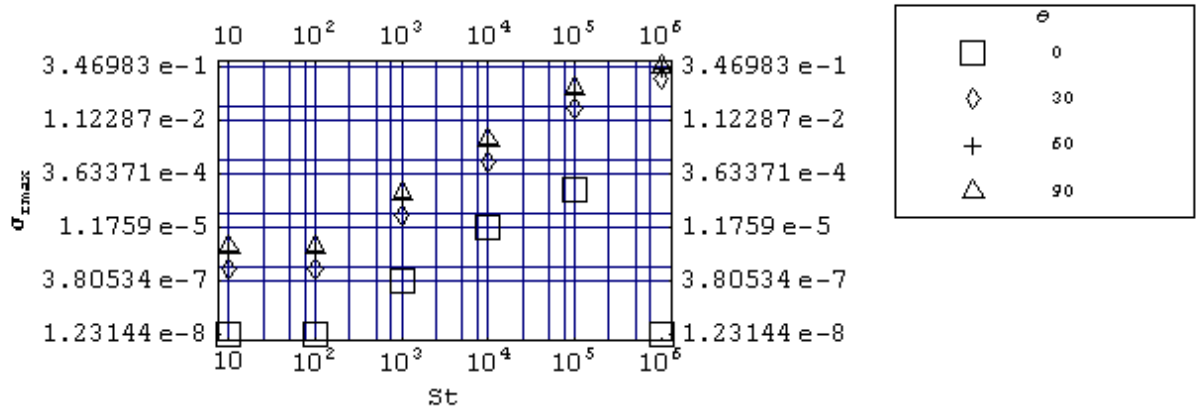
**Figura 6.37 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Koch e Sangani  $\phi_0 = 0.54$ ,  $\delta = 0.0001$**



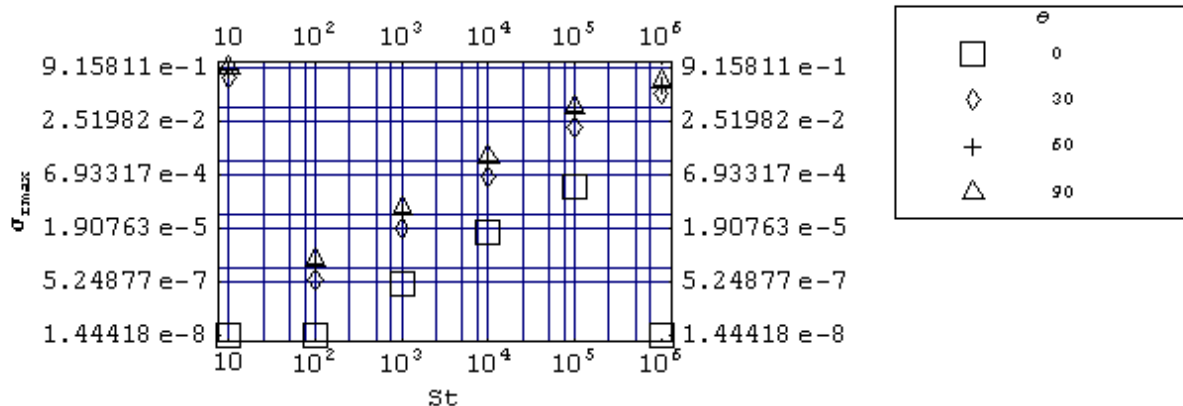
**Figura 6.38 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Koch e Sangani  $\phi_0 = 0.56$ ,  $\delta = 0.0001$**

## 6.8 Resultados obtidos utilizando o modelo de Buyevich

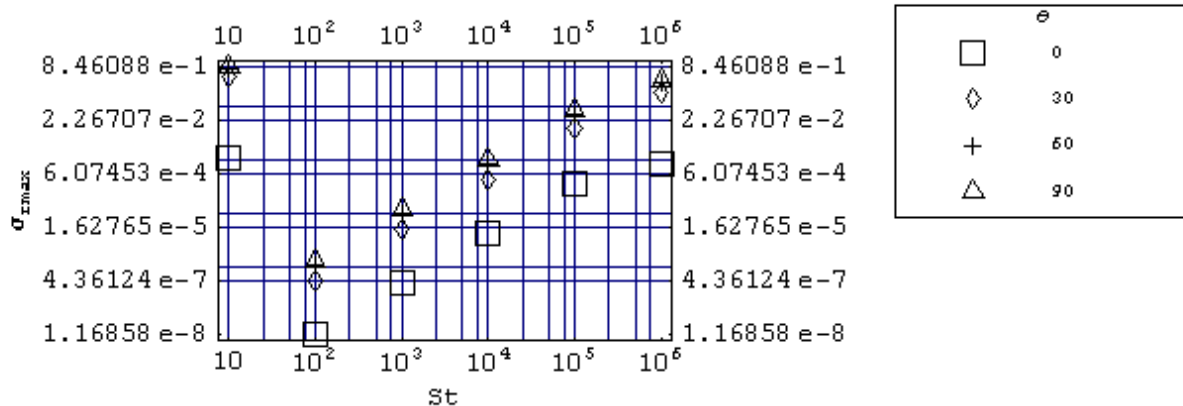
As Figuras 6.39 a 6.42 apresentam os resultados para o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio. Uma comparação com os resultados do modelo proposto sugere a dominância do modo vertical, com os valores em geral sendo inferiores ao do modelo proposto.



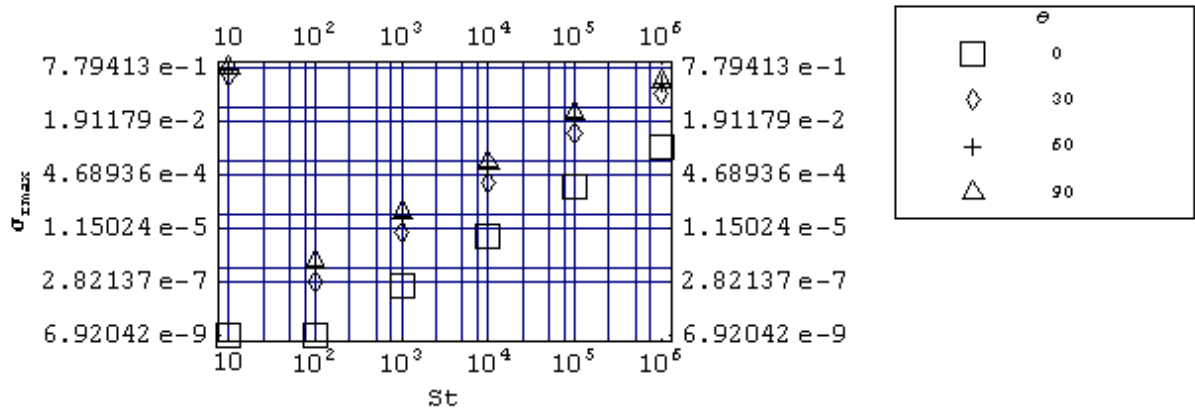
**Figura 6.39 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Buyevich  $\phi_0 = 0.5$ ,  $\delta = 0.0001$**



**Figura 6.40 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Buyevich  $\phi_0 = 0.52$ ,  $\delta = 0.0001$**

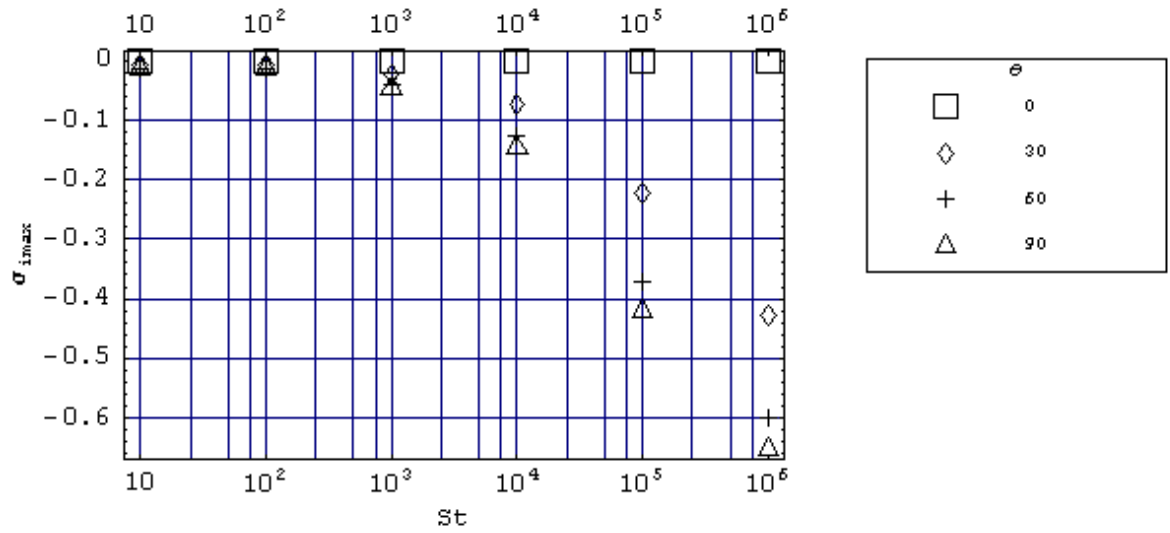


**Figura 6.41 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Buyevich  $\phi_0 = 0.54$ ,  $\delta = 0.0001$**



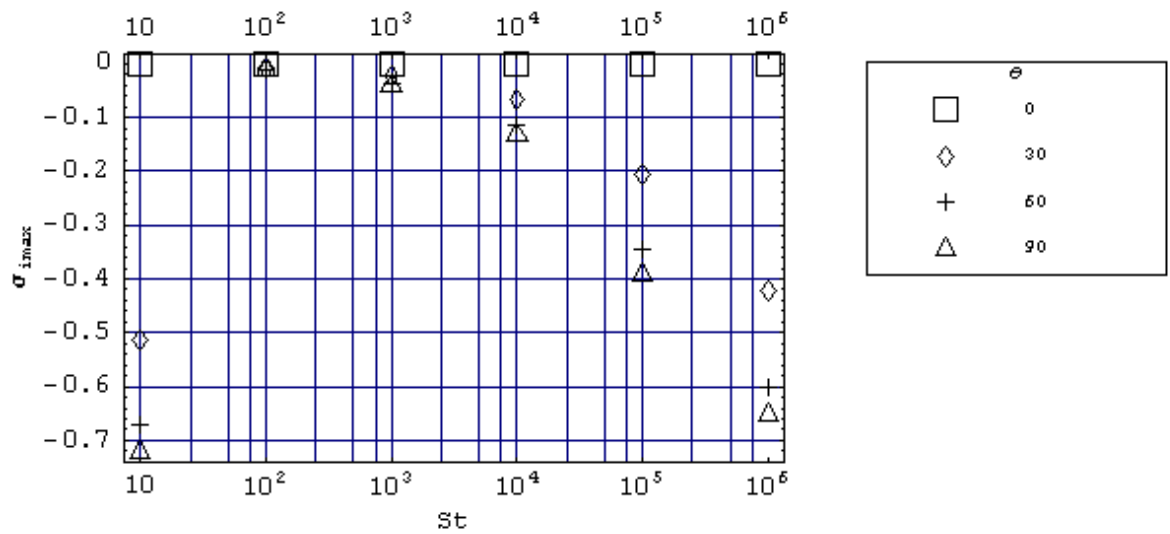
**Figura 6.42 - Fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio de acordo com modelo de Buyevich  $\phi_0 = 0.56$ ,  $\delta = 0.0001$**

As Figuras 6.43 a 6.46 ilustram o comportamento da frequência da onda de distúrbio. Os valores obtidos são inferiores aos dos demais modelos; embora, possuindo comportamento similar com o número de Stokes e a fração de sólidos.



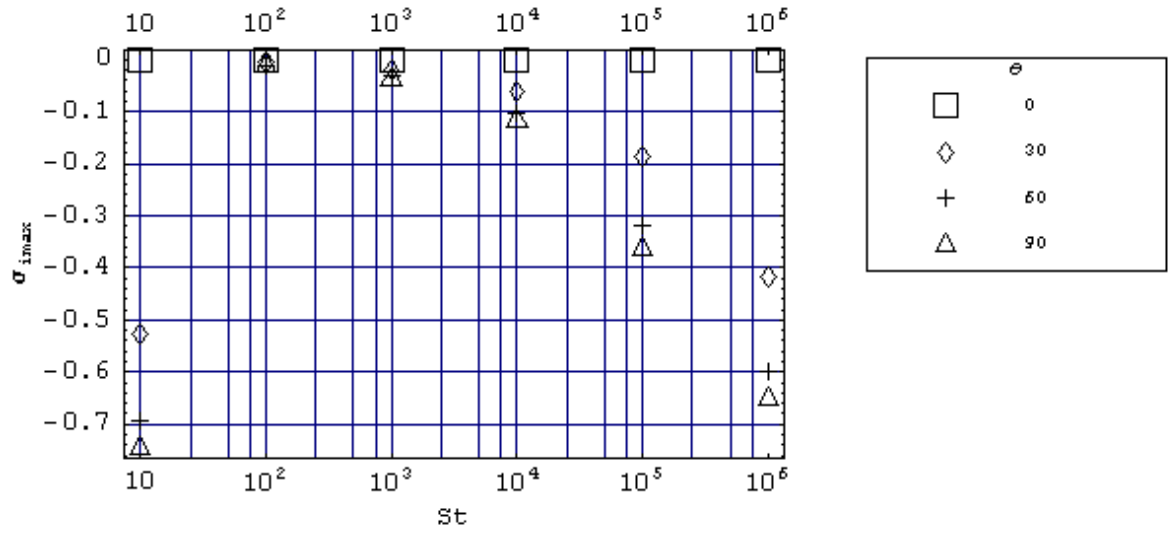
**Figura 6.43 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Buyevich**

$\phi_0 = 0.5, \delta = 0.0001$

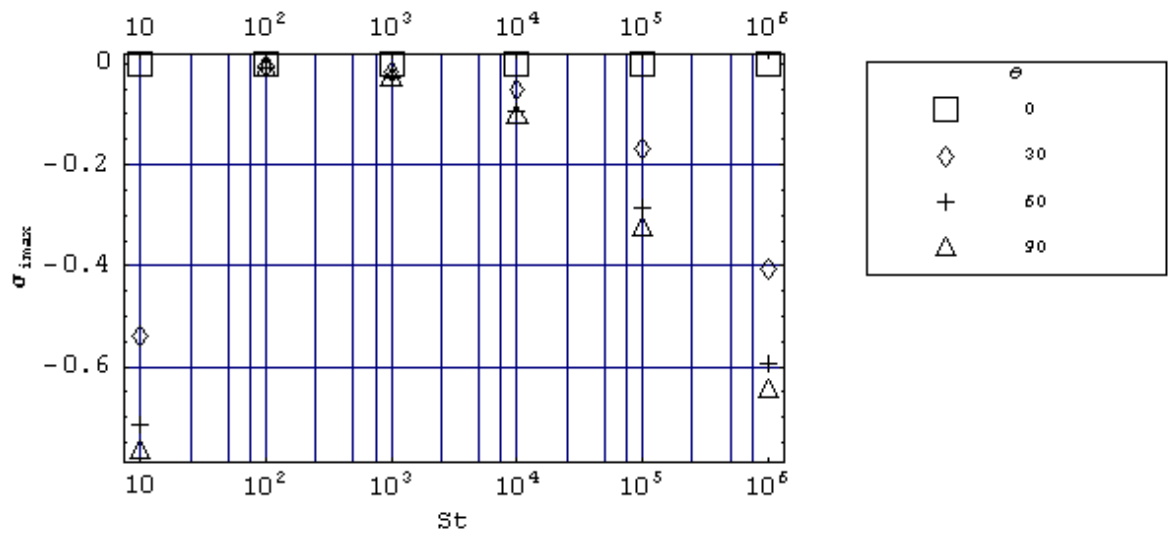


**Figura 6.44- Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Buyevich**

$\phi_0 = 0.52, \delta = 0.0001$



**Figura 6.45 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Buyevich**  
 $\phi_0 = 0.54, \delta = 0.0001$



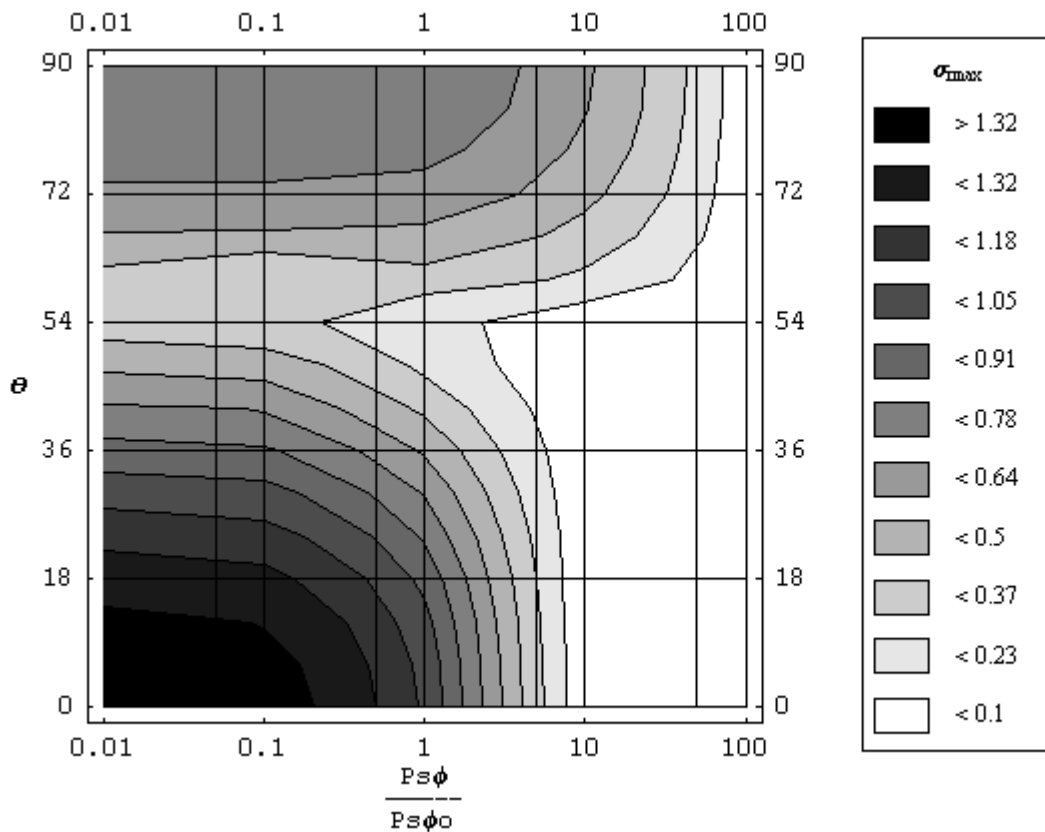
**Figura 6.46 - Frequência da onda de distúrbio máxima conforme modelo de Buyevich**  
 $\phi_0 = 0.56, \delta = 0.0001$



## 6.9 Efeito de propriedades e derivadas sobre a estabilidade

Nesta seção serão discutidos os efeitos de propriedades e derivadas associadas à fase sólida sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio “ $\sigma_{\text{rmax}}$ ”.

A Figura 6.47 ilustra o efeito do aumento da derivada de pressão de sólidos “ $p_{s\phi}$ ” em relação à fração de sólidos. Observa-se que um aumento da derivada promove um aumento da estabilidade. Tal fato está em concordância com as predições qualitativas feitas por Anderson e Jackson (1968).

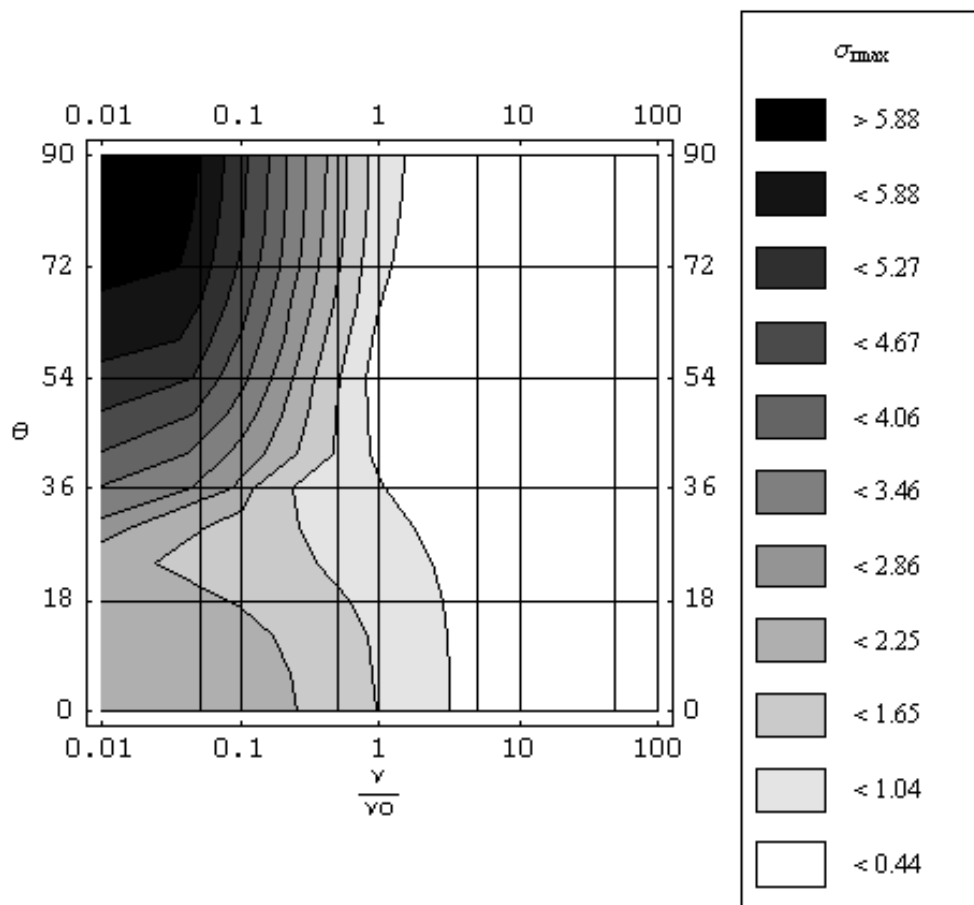


**Figura 6.47** Efeito do aumento da derivada da pressão de sólidos em relação a fração de sólidos, sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\delta = 0.4$ ,  $St = 10^4$ ,  $\phi_0 = 0.56$ <sup>23</sup>.

A Figura 6.48 apresenta o efeito do aumento da viscosidade da fase sólida “v”. De forma similar à derivada da pressão de sólidos, tal termo tem efeito estabilizante.

Deve ser observada nas duas figuras anteriores, também, uma tendência de maiores valores do fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para direções de propagação próximas à horizontal. Tal tendência é atenuada para os maiores valores de viscosidade da fase sólida.

<sup>23</sup> O índice “o” no denominador da abcissa do gráfico corresponde ao valor básico.

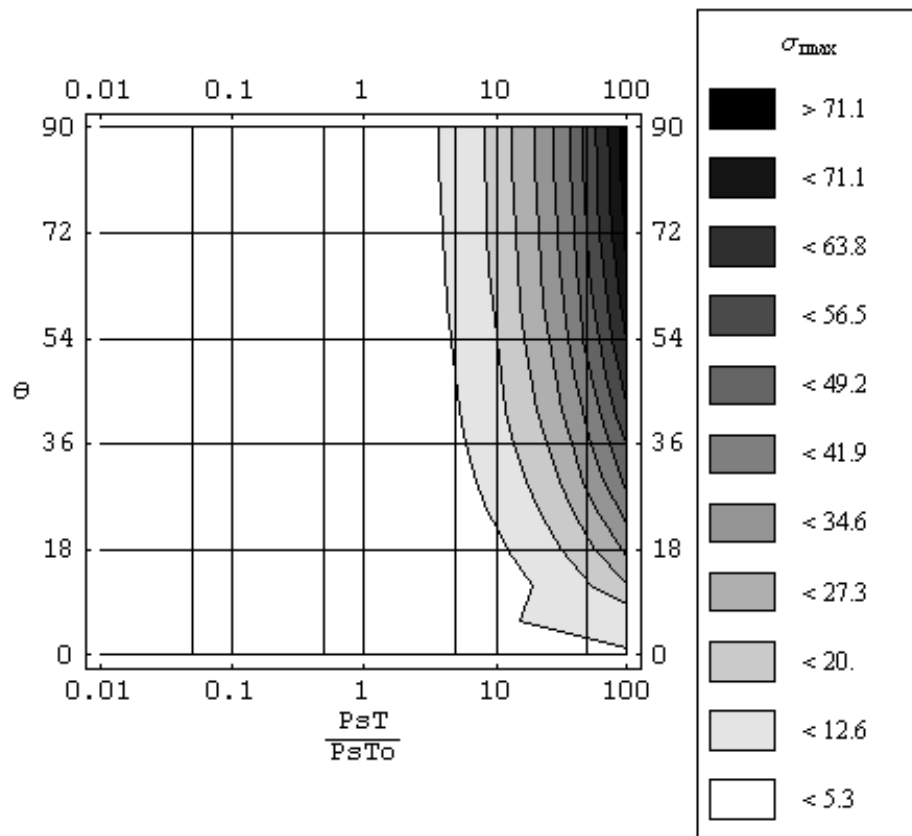


**Figura 6.48 - Efeito do aumento da viscosidade da fase sólida sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\delta = 0.4$ ,  $St = 10^4$ ,  $\phi_0 = 0.56$ .**

As Figuras 6.49 a 6.52 ilustram o efeito sobre a estabilidade de propriedades decorrentes do modelo não isotérmico.

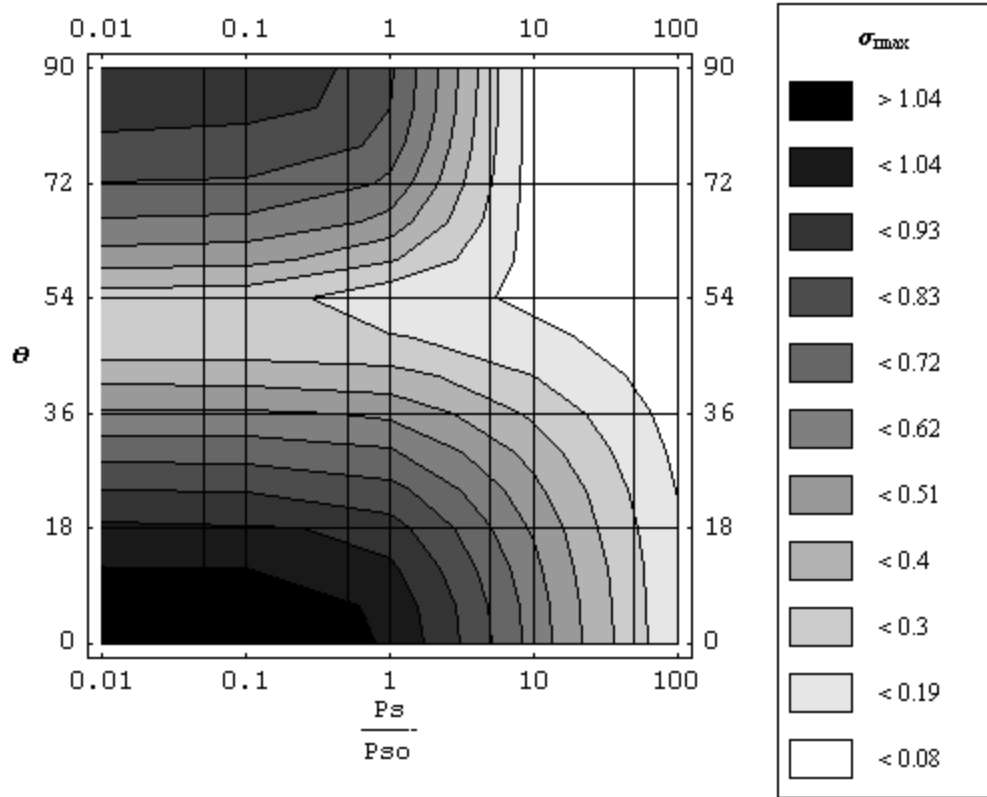
A Figura 6.49 apresenta o efeito do aumento da derivada da pressão de sólidos em relação à temperatura granular. A análise da figura indica um aumento da instabilidade com o aumento de tal derivada. Esse aumento é mais acentuado para perturbações que se propagam nas direções próximas à vertical. A figura também sugere a existência de um valor mínimo do fator de

crescimento da amplitude da onda de distúrbio.



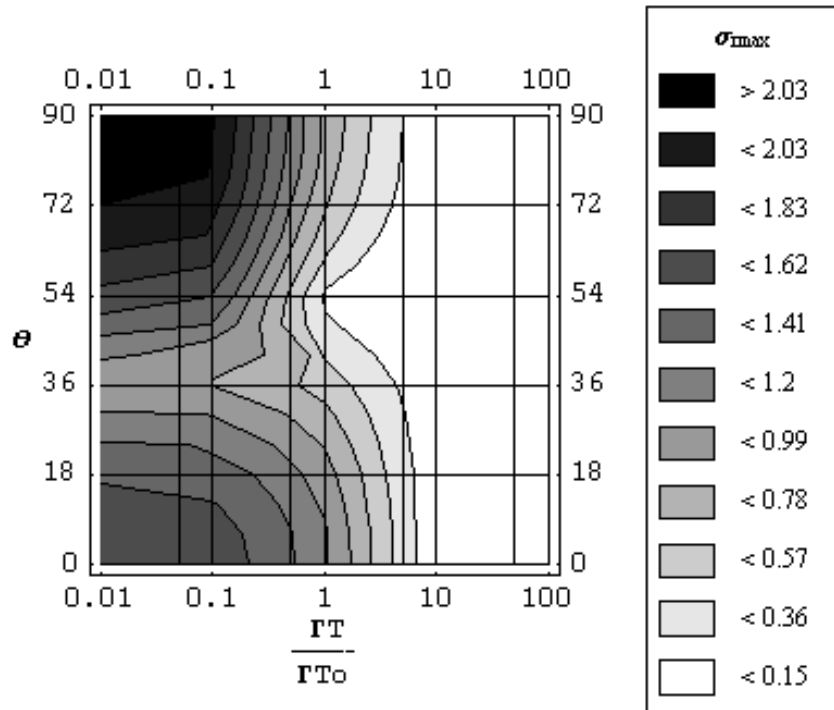
**Figura 6.49 – Efeito do aumento da derivada da pressão de sólidos em relação a temperatura granular, sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\delta = 0.4$ ,  $St = 10^4$ ,  $\phi_0 = 0.56$ .**

A Figura 6.50 ilustra o efeito do aumento da pressão da fase sólida sobre a estabilidade. Esta sugere um aumento da estabilidade com o aumento da pressão de sólidos. Contrariamente ao modelo isotérmico, a figura indica que perturbações propagando em direções próximas à horizontal são mais instáveis.



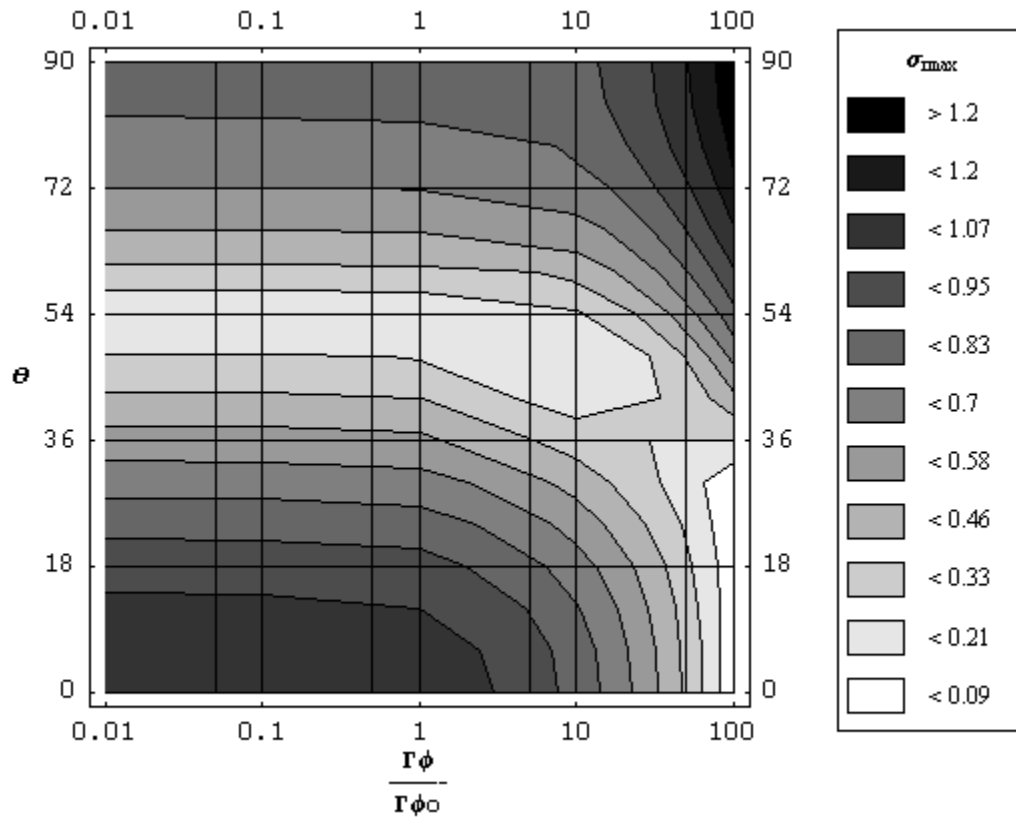
**Figura 6.50** Efeito do aumento da pressão de sólidos sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\delta = 0.4$ ,  $St = 10^4$ ,  $\phi_0 = 0.56$ .

A Figura 6.51 ilustra o efeito sobre a estabilidade do aumento da derivada do termo fonte efetivo em relação à temperatura granular. Para valores para “ $\Gamma_T$ ” acima de cinco vezes maiores que o valor inicial, as direções próximas à horizontal assumem o menor valor de estabilidade, enquanto que as direções próximas à vertical tornam-se mais instáveis.



**Figura 6.51** Efeito do aumento da derivada do termo fonte efetivo em relação a temperatura granular, sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\delta = 0.4$ ,  $St = 10^4$ ,  $\phi_0 = 0.56$

Na Figura 6.52 encontra-se ilustrado o efeito do aumento da derivada do termo fonte efetivo em relação à fração de sólidos. Essa figura sugere a existência de uma região de maior estabilidade relativa até valores próximos de vinte vezes o valor inicial. Subseqüentes aumentos da derivada levam a maior instabilidade de forma aproximadamente isotrópica (i.e. independente da direção de propagação).



**Figura 6.52 – Efeito do aumento da derivada do termo fonte efetivo em relação a fração de sólidos, sobre o fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio para  $\delta = 0.4$ ,  $St = 10^4$ ,  $\phi_0 = 0.56$ .**

## 6.10 Comparação com resultados experimentais

Conforme discutido no Capítulo 1, medições experimentais relativas à propagação de instabilidades em leitos fluidizados são encontrados nos trabalhos de El-Kaissy e Homsy (1976), Didwania e Homsy (1981) e Ham et al (1990).

### 6.10.1 El-Kaissy e Didwania

O trabalho experimental de El-Kaissy e Homsy (1976) concentrou-se em um leito bidimensional<sup>24</sup> fluidizado por água. A Tabela 6.1 apresenta os valores paramétricos abrangidos experimentalmente e respectivos valores das características de propagação das instabilidades.

**Tabela 6.1 Valores experimentais conforme El-Kaissy e Homsy<sup>25</sup> (1976)**

St	$\phi_0$	$\phi_{mf}$	$\sigma_{rmax}$	$\sigma_{imax}$	$k_{max}$
11546	0.599	0.65	4.9991E-05	0.012948	0.07
11546	0.578	0.65	0.00036941	0.041045	0.2
11546	0.573	0.65	0.0006483	0.03632	0.17
32660	0.59	0.633	0.00016483	0.012263	0.062
32660	0.575	0.633	0.0003401	0.043555	0.186
32660	0.559	0.633	0.00162549	0.07613	0.296
95220	0.55	0.605	0.00045173	0.039834	0.17
95220	0.544	0.605	0.00159432	0.042167	0.17
267928	0.559	0.614	0.0001046	0.02005	0.075
267928	0.541	0.614	0.00043754	0.07266	0.25
267928	0.527	0.614	0.00080084	0.10146	0.31

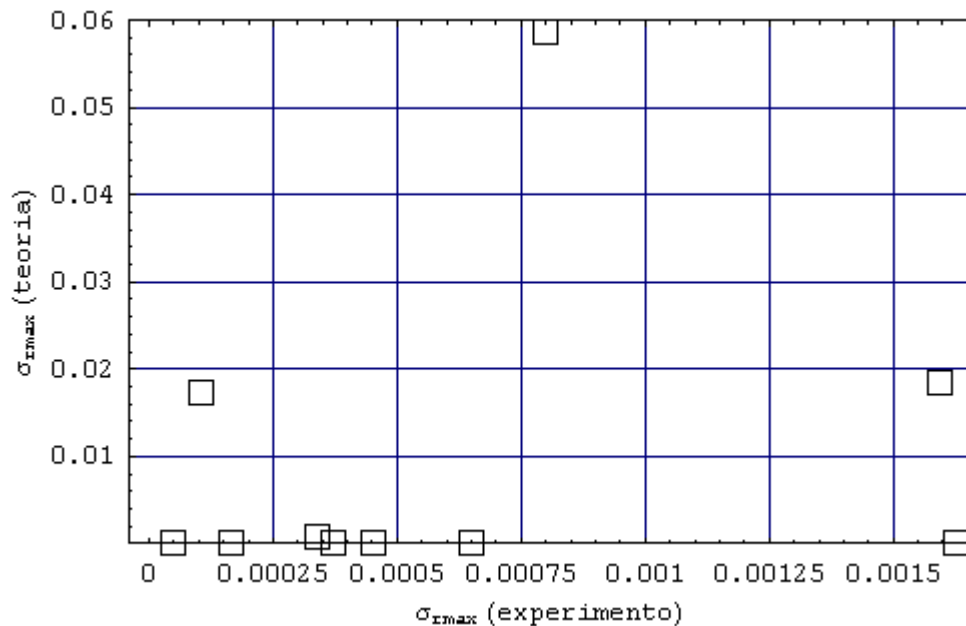
---

<sup>24</sup> O termo bidimensional é empregado aqui para identificar os leitos de seção transversal retangular cuja espessura é desprezível em comparação com a sua altura e largura.

<sup>25</sup>  $\delta = 0.416667$



A comparação entre os fatores de crescimento experimentais<sup>26</sup> e os previstos pela teoria não isotérmica encontra-se apresentado na Figura 6.92, a seguir:



**Figura 6.53 – Comparação entre os fatores de crescimento teóricos e experimentais**

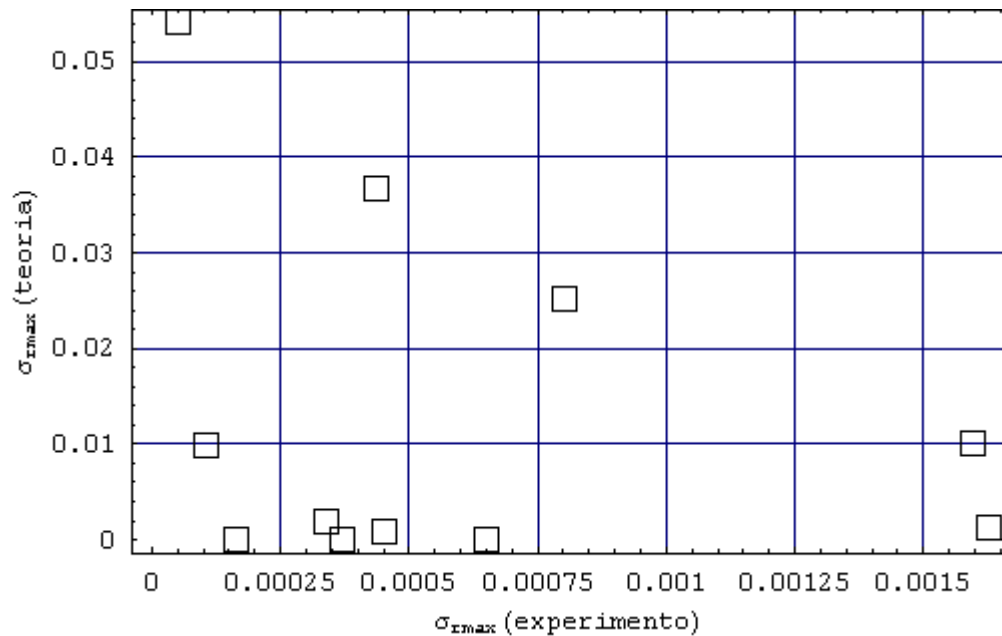
Assim, verifica-se que parte dos valores previstos pela teoria foram superiores aos previstos experimentalmente, enquanto que em outra parte os valores foram inferiores. Os valores superiores são cerca de 100 vezes maiores que os previstos experimentalmente, enquanto que os valores inferiores predisseram a estabilidade.

A pouca concordância anterior entre teoria e experimento, sugere que um ajuste preliminar, baseado na variação dos parâmetros discutidos na Seção 6.9, possa ser feito.

A Figura a seguir apresenta tal ajuste:

---

<sup>26</sup>Deve ser observado que o número de onda “ $k_{\text{max}}$ ” e a frequência “ $\sigma_{\text{imax}}$ ” são dependentes do fator de crescimento “ $\sigma_{\text{rmax}}$ ”.



**Figura 6.54 – Comparação entre os fatores de crescimento teóricos e experimentais após ajuste**

O ajuste anterior baseou-se na variação independente da ordem de grandeza dos parâmetros discutidos na Seção 2.9, de forma a obter-se uma maior proximidade entre os resultados teóricos e experimentais. Desta forma foram escolhidos os valores correspondentes à máxima proximidade entre os fatores de crescimento teóricos e experimentais.

Conforme breve discussão, apresentada no Apêndice C, a característica de propagação do distúrbio é afetada pela presença de parede que, em geral, tem efeito estabilizador. Assim, os fatores de crescimento teóricos obtidos anteriormente possivelmente assumem valores inferiores e mais próximos aos experimentais.

Por outro lado deve ser observado que a supressão dos pontos onde o modelo proposto não se adequou (i.e. na faixa de números de Stokes baixos), contribui também para melhorar a proximidade com os valores experimentais.

A Tabela 6.2 apresenta os resultados referentes às características de propagação das instabilidades bidimensionais conforme Didwania e Homsy (1981). Face ao pequeno número de pontos experimentais, os dados servem apenas para quantificar as instabilidades secundárias, mas

ajudam a corroborar os resultados obtidos para o modelo não isotérmico (vide Seção 6.3).

**Tabela 6.2 Valores experimentais referentes as instabilidades bidimensionais (Didwania e Homsy, 1981)<sup>27</sup>**

$\theta$	$\phi_0$	$\phi_{mf}$	St	k	$\sigma_{imax}$
56°	0.566	0.63	33734	0.018	0.017205
64°	0.56	0.617	207870	0.0407	0.024355

### 6.10.2 Ham et al.

Ham e colaboradores (1990) obtiveram novos dados experimentais referentes à estabilidade de sistemas fluidizados por líquido. Utilizando montagem experimental similar à utilizada nos trabalhos anteriores (El-Kaissy e Homsy, 1976; Didwania e Homsy, 1981), identificaram transições entre os regimes instável e estável de propagação de instabilidades. Tais transições foram caracterizadas por valores de fração de sólidos “ $\phi_0$ ” a partir das quais instabilidades unidimensionais na forma de ondas planares são observadas.

Na Tabela 6.1 encontram-se apresentados os resultados obtidos por tais autores.

---

<sup>27</sup>  $\delta = 0.25$

**Tabela 6.3 – Dados experimentais conforme Ham et al (1990)**

$\delta$	St	$\phi_{mf}$	$\phi_0$
0.41322314	16144.46	0.593	0.571
0.4048583	5825.543	0.591	0.575
0.401606426	2087.939	0.59	0.572
0.4048583	728.1929	0.602	0.59
0.4048583	268.8529	0.589	0.561
0.418072289	681.776	0.593	0.576
0.43253012	299.578	0.59	0.572
0.44497992	104.9659	0.591	0.552
0.460240964	22.19087	0.587	0.536
0.241545894	5771.913	0.588	0.581
0.840336134	321.5863	0.553	0.548
0.840336134	3903.793	0.557	0.538

De forma contrária aos trabalhos de El-Kaissy e Homsy (1976) e Didwania e Homsy (1981), não foram medidas as características de propagação dos distúrbios dadas por  $\sigma_{r\max}$  e  $\sigma_{i\max}$ . Assim, inviabilizando uma comparação com as características de propagação previstas teoricamente.

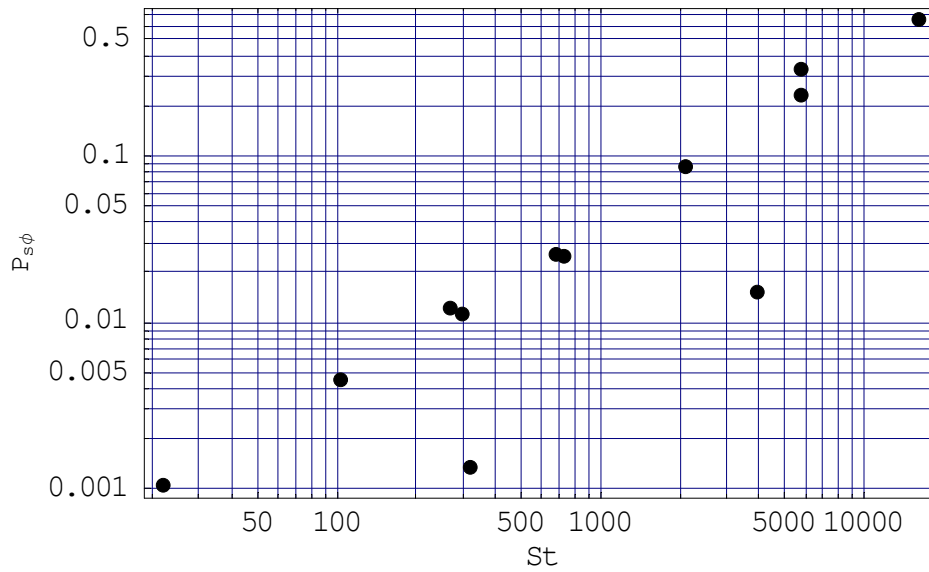
Por outro lado, os dados experimentais anteriores, permitem a obtenção de estimativas para o parâmetro de estabilidade discutido na Seção 3.9. Tal parâmetro foi obtido para a situação

isotérmica e unidimensional conforme Equação (3.133), ou:

$$p_{s\phi}^* = \frac{1}{324} St^{1/2} (1-\delta)(1-\phi_0)^{n-1} \phi \left\{ 18C\delta(\phi_0-1)\phi_0(n\phi_0-1) + St^{1/2}(\delta-1) \left[ \delta \left\{ (\phi_0-1)(n\phi_0-1)^2 + C(-\phi_0(n+\phi_0-2)-1)-1 \right\} - n^2(\phi_0-1)^2\phi_0 \right] (1-\phi_0)^n \right\} \quad (3.133)$$

Aqui, a igualdade indica o ponto de transição entre os regimes estável e instável, i.e., o aparecimento de ondas planares propagando-se na direção vertical.

A Figura 6.3 apresenta os valores calculados utilizando os dados da Tabela 6.3 e a Equação (3.133).



**Figura 6.55 – Estimativas para o módulo de elasticidade da fase sólida utilizando os dados experimentais de Ham et al. (1990)**

A Figura 6.55 indica que o módulo “ $p_{s\phi}$ ” varia diretamente com o número de Stokes. Também indica que para a faixa de Stokes alta (e.g sistemas fluidizados por gás) o valor de “ $p_{s\phi}$ ” necessário para estabilizar o leito é algumas ordens de grandeza maior que para a faixa de Stokes baixa (e.g. sistemas fluidizados por líquido). Tal fato está em concordância com as evidências

experimentais de que sistemas fluidizados por líquido são mais estáveis que os fluidizados por gás.

## Capítulo 7

### Conclusões

#### 7.1 Conclusões finais

No presente trabalho foi investigado o efeito da introdução da temperatura granular na modelagem da propagação de instabilidades lineares em sistemas fluidizados.

No capítulo inicial, foi apresentado um histórico do estudo de estabilidade em fluidização. Em seguida, foi discutida a teoria linear classicamente aplicada ao modelo isotérmico<sup>28</sup>. No capítulo seguinte, foram discutidos os conceitos referentes à temperatura granular e propriedades. A análise linear não isotérmica foi apresentada em seguida.

Um sumário das principais conclusões referentes ao modelo isotérmico é apresentado a seguir:

- Esses modelos levam a concluir que maiores instabilidades ocorreriam na direção vertical, na faixa de Número de Stokes elevados ( $\sim 10^6$ ) dentro do domínio  $\delta \times \phi \times St$ . Os distúrbios são atenuados para a direção horizontal.
- Aumentos da fração de sólidos contribuem para o aumento da instabilidade.
- A frequência da onda é crescente com a fração de sólidos e máxima para direções de propagação próximas à vertical.

---

<sup>28</sup> Relembrando que o termo “isotérmico” refere-se a desconsiderar a temperatura granular.

- A existência de instabilidade para baixos números de Stokes sugere a inadequação da relação constitutiva para a pressão da fase sólida.

A introdução do conceito de temperatura granular na análise linear de estabilidade foi discutida na Seção 6.3. Ao contrário da análise ou modelo isotérmico, mostrou-se que o estado básico de fluidização pode tornar-se instável para distúrbios transversais à direção da gravidade. Além disso, sob certas condições, tais distúrbios podem tornar-se mais instáveis que em outras direções. Esse comportamento inédito sugere uma nova explicação para as instabilidades secundárias e bolhas observadas experimentalmente em leitos fluidizados (ver Figuras 2.1 e 2.2 do Capítulo 2). Assim, suspeita-se que uma mudança do modo isotérmico (com fator de crescimento nulo na direção horizontal) para o modo não isotérmico ocorra durante a formação de bolhas.

Além disso, o modelo não isotérmico permitiu verificar que:

- O máximo fator de crescimento da amplitude da onda é superior ao previsto pelo modelo isotérmico; crescendo, também, com o aumento do número de Stokes e da fração de sólidos.
- A frequência máxima corresponde à direção vertical e é pouco alterada pela variação da fração de sólidos. O distúrbio é não oscilatório na direção horizontal, i.e., sua frequência temporal é nula.
- Os resultados referentes ao efeito da razão entre as densidades da fase fluida e sólida estão em concordância com as evidências experimentais, ou seja, os sistemas fluidizados por líquido são mais estáveis que os fluidizados por gás.
- Um decréscimo do coeficiente “ $n$ ” (usado na obtenção do coeficiente de interação entre as fases através da correlação de Richardson e Zaki, 1954) corresponde a um aumento significativo na instabilidade.
- Por outro lado, um aumento na fração de sólidos correspondente à mínima fluidização resultou em alteração quantitativa e qualitativa da instabilidade. A alteração quantitativa se reflete na redução do valor do máximo fator de crescimento da amplitude da onda de distúrbio; enquanto, a qualitativa, na direção de propagação correspondente ao máximo fator



de crescimento ser vertical.

- A redução da fração de sólidos correspondente ao máximo empacotamento influenciou também quantitativamente os resultados. Tal redução levou a maiores instabilidades.
- Foi verificado que menores valores de condutividade térmica<sup>29</sup> correspondem a aumentos de instabilidade.

Os resultados previstos utilizando as relações constitutivas dos modelos de Koch e Sangani (1999) e Buyevich (1994) permitem concluir que:

- Da mesma forma que o presente modelo, os demais modelos indicaram instabilidade para os distúrbios correspondentes a direção horizontal. Para o modelo de Koch e Sangani (1999) foi predita anisotropia, i.e., independência do maior fator de crescimento, da direção de propagação. Para o modelo de Buyevich (1994) foi predita a ocorrência do maior máximo fator de crescimento<sup>30</sup> na direção vertical. Os valores obtidos para o modelo de Koch e Sangani foram da mesma ordem de grandeza que os do presente modelo, mas inferiores aos obtidos pelo modelo de Buyevich. Da mesma forma que o modelo proposto, a presença de uma região de maior instabilidade para baixos números de Stokes sugere a inadequação dos demais modelos nesta faixa de valores.
- O comportamento da frequência da onda de distúrbio máxima prevista usando os demais modelos foi qualitativamente similar ao modelo aqui proposto. Assim, os maiores valores são encontrados para Número de Stokes elevados e para direções verticais de propagação. Em geral, os resultados para a frequência previstos pelo presente modelo foram menores que os previstos pelo modelo de Koch e Sangani e maiores que os previstos pelo modelo de Buyevich.

Na Seção 6.9, foram discutidos os efeitos das propriedades relativas à fase sólida sobre a estabilidade. Em concordância com os resultados isotérmicos clássicos de Anderson e Jackson (1968), foi demonstrado que os seguintes fatores levam à maior estabilidade no leito:

---

<sup>29</sup> Relembrando que a terminologia “térmica” refere-se a temperatura granular.

<sup>30</sup> Tais distúrbios correspondem aos maiores valores das máximas taxas de crescimento da amplitude

- Aumento da viscosidade da fase sólida,
- Aumento da derivada da pressão de sólidos em relação à fração desses.

Ainda, considerando os efeitos das propriedades relativas à introdução da temperatura granular verificou-se que:

- Aumentos da derivada da pressão da fase sólida em relação à temperatura granular promovem um aumento da estabilidade.
- Da mesma forma, aumentos da pressão da fase sólida contribuem para o aumento da estabilidade.
- Aumentos da derivada do termo fonte efetivo em relação à temperatura granular são estabilizadores.
- Contrariamente ao efeito das variações dos demais termos, um aumento da derivada do termo fonte efetivo em relação à fração de sólidos promove diminuição da estabilidade.

A comparação entre os resultados teóricos aqui obtidos e resultados experimentais coletados na literatura concentraram-se em três trabalhos<sup>31</sup>: El Kaissy e Homsy (1976), Didwania e Homsy (1981) e Ham e colaboradores (1990).

- De modo geral, os valores preditos teoricamente para a situação não isotérmica e vertical foram superiores aos experimentais obtidos por El-Kaissy e Homsy (1976) na faixa de Stokes elevada  $10^5$ - $10^6$ .
- Um ajuste baseado na variação da ordem de grandeza das propriedades associadas à fase sólida permitiu melhorar a concordância entre os valores teóricos e experimentais. Além disso, a existência de paredes (vide Apêndice C) contribui para uma maior proximidade entre os resultados.

---

<sup>31</sup> Deve ser mencionada a relativa parcimônia de dados experimentais úteis para a comparação com as predições teóricas.

- Por outro lado, deve-se observar que a supressão dos pontos onde o modelo proposto não se adequa, i.e., na faixa de números de Stokes baixos, contribui também para melhorar a concordância com os valores experimentais.

Os valores experimentais obtidos por Didwania e Homsy (1981) têm o propósito de quantificar as instabilidades bidimensionais ilustradas nas Figuras 2.1 e 2.2. Tais valores servem para corroborar qualitativamente os resultados aqui obtidos por meio do modelo não isotérmico.

Por fim, os valores experimentais de Ham e colaboradores foram adequados à obtenção do módulo de elasticidade para situação isotérmica. O ajuste anterior confirmou a evidência conhecida de que sistemas fluidizados por líquido são mais estáveis de que os fluidizados por gás.

## **7.2 Perspectivas Futuras**

No presente trabalho foi proposto um passo adiante no refinamento teórico do fenômeno de instabilidade em fluidização. Acredita-se aqui que um posterior aprimoramento do modelo teórico passe pela obtenção de maior número de dados experimentais referentes à propagação de instabilidades.

Nesse sentido, o presente modelo teórico sugere possíveis orientações para a obtenção de dados experimentais:

- Medições referentes à temperatura granular, i.e., energia cinética associada à flutuação de velocidades das partículas.
- Medições referentes às características de propagação dos distúrbios bidimensionais. Tais medidas proporcionariam melhores estimativas para as propriedades associadas à fase sólida.

Deve-se observar que a presente modelagem<sup>32</sup> é passível de ser estendida para outros sistemas multifásicos (e.g. sistemas gás-líquido). Assim, a comparação entre experimento e teoria seria beneficiada pelo maior número de dados experimentais disponíveis para tais sistemas.

Embora o autor julgue prementes as sugestões indicadas acima para trabalhos experimentais, alguns aspectos referentes à teoria merecem atenção para desenvolvimentos futuros:

- Desenvolvimento dos casos simplificados:  $\delta \rightarrow 0$ ,  $St \rightarrow \infty$ ,  $\Gamma_{sw}^2 \rightarrow 0$ . É esperado que tais casos forneçam um menor número de parâmetros para comparação com os dados experimentais.
- Estudo não linear nos moldes dos trabalhos de Liu (1982, 1983), Glasser et al (1996) e Anderson et al (1995). Espera-se que a introdução da equação de balanço da temperatura granular no conjunto previamente estudado por tais autores forneça novos resultados para a dinâmica dos leitos além das instabilidades lineares.
- Aplicação da presente abordagem para sistemas multiparticulados. Desta forma, estendendo os conceitos da teoria cinética dos gases, aqui empregados para sistemas monoparticulados.

---

<sup>32</sup> I.e., a análise linear de estabilidade do conjunto formado por equações de continuidade e quantidade de movimento, considerando os efeitos associados à flutuação de velocidade de uma das fases.

## Referências Bibliográficas

- Anderson, K., Sundaresan, S., Jackson, R. Instabilities and the formation of bubbles in fluidized beds. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 303, p.327-366, 1995.
- Anderson, T.B. A fluid mechanical description of fluidized beds: Equations of motion. *Industrial Engineering Chemical Fundamentals*, 6, p. 527-539, 1967.
- Anderson, T.B., Jackson, R. A fluid mechanical description of fluidized beds: Comparison of theory and experiment. *Industrial Engineering Chemical Fundamentals*, v.8, p.137-144, 1969.
- Anderson, T.B., Jackson, R. Fluid Mechanical Description of fluidized beds: Stability of the state of uniform fluidization. *Industrial Engineering Chemical Fundamentals*, v.7, p.12-21, 1968.
- Basset, A.B., *Treatise on hydrodynamics: II*, London: Deighton-Bell Co, p.285-295, 1888. (Dover Reprints 1961)
- Batchelor, G.K. A new theory of the instability of a uniform fluidized bed. *Journal of Fluid Mechanics*, v.193, p.75-110, 1988.
- Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N. *Transport Phenomena*. Singapore: John Wiley and Sons, 1960, p.79.
- Briens, C. L. Correlation for the direct calculation of the terminal velocity of spherical particles in newtonian and pseudo-plastic (power-law) fluids. *Powder Technology*, v. 67, p. 87-91,

1991.

Buyevich, Y. A., Fluid dynamics of coarse dispersions, *Chemical Engineering Science*, v.49, p.1217-1228, 1994.

Buyevich, Y. A., Kapbasov, S. K. Random fluctuations in a fluidized bed, *Chemical Engineering Science*, v.49, p.1229-1243, 1994.

Chapman, S., Cowling, T. G. *The mathematical theory of non-uniform gases*. London: Cambridge University Press, 1970.

Costa, A.M.S., 1º Relatório processo nº 98/00856-0, apresentado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Campinas-SP, 1999.

Costa, A.M.S., 2º Relatório processo nº 98/00856-0, apresentado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Campinas-SP, 2000.

Costa, A.M.S., 3º Relatório processo nº 98/00856-0, apresentado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Campinas-SP, 2001.

Costa, A.M.S., 4º Relatório processo nº 98/00856-0, apresentado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Campinas-SP, 2002.

de Souza-Santos, M.L., *Modelling and simulation of fluidized-bed boilers and gasifiers for carbonaceous solids*, Ph.D. thesis, University of Sheffield, Department of Chemical Engineering and Fuel Technology, England, 1987.

de Souza-Santos, M.L., Comprehensive modelling and simulation of fluidized-bed boilers and gasifiers, *Fuel*, vol. 68, 1507-1521, 1989.

de Souza-Santos, M.L., Application of comprehensive simulation to pressurized fluidized bed hydroretorting of shale. *Fuel*, vol. 73, n. 9, pp. 1459-1465, 1994a.

de Souza-Santos, M.L., Application of comprehensive simulation of fluidized-bed reactors to the pressurized gasification of biomass. *J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences*, vol. XVI, n.

4, pp. 376-383, 1994b.

de Souza-Santos, M.L., A study on pressurized fluidized-bed gasification of biomass through the use of comprehensive simulation. In: **4th Int. Conference on Technologies and Combustion for a Clean Environment**, 1997, Lisboa. Proceedings, art. 25.2, vol. II, 1997a.

de Souza-Santos, M.L., Search for favorable conditions of pressurized fluidized-bed gasification of sugar-cane bagasse through comprehensive simulation. In: **XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, 1997, Bauru, São Paulo. Anais, 1997b.

de Souza-Santos, M.L., Search for favorable conditions of atmospheric fluidized-bed gasification of sugar-cane bagasse through comprehensive simulation. In: **XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Bauru, São Paulo. Anais, 1997c.

de Souza-Santos, M.L., **Combustion Technologies for a Clean Environment**. Amsterdam: Gordon and Breach Publishers. 1998. Chapter 4: A study on pressurized fluidized-bed gasification of biomass through the use of comprehensive simulation.

de Souza-Santos, M.L., A feasibility study on an alternative power generation system based on biomass gasification/gas turbine concept. **Fuel**, vol. 78, pp. 529-538, 1999.

Delhaye, J.M., Giot, M., Riethmuller, M.L., **Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering**, Hemisphere: McGraw-Hill, 1981.

Didwania, A.K., Costa, A.M.S., Effect of particle velocity fluctuations on the stability of fluidized beds. In: **AIChE Particle technology Forum proceedings**, AIChE Annual Meeting. 12-17 Nov 2000, Los Angeles.

Didwania, A.K., Homsy, G.M., Flow regimes and flow transitions in liquid fluidized beds, **International Journal of Multiphase Flow**, 7, p. 563-580, 1981a.

Didwania, A.K., Homsy, G.M., Rayleigh-Taylor instabilities in fluidized beds, **Industrial Engineering Chemical Fundamentals**, 20, p. 318-323, 1981b.

Didwania, A.K., Packed-to-fluidized bed transition and origin of particle-free regions, In:

*Proceedings of IUTAM Symposium Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials*, 5-9 September 1999, Stuttgart 1999, Kluwer Press.

Drew, D. A., Lahey, R. T., Analytical modeling of multiphase flow, In: Roco, M. C., ***Particulate two-phase flows***, Massachusetts: Butterworth-Heinemann, 1993, p.509-566.

El-Kaissy, M.M., Homsy, G.M., Instabilities waves and the origin of bubbles in fluidized beds, Part 1: Experiments. ***International Journal of Multiphase Flow***, v.2, p.379-395, 1976.

Ergun, S., Fluid Flow through packed columns. ***Chemical Engineering Progress***, v. 48, p. 91-94, 1952.

Fan, L. S., Zhu, C., ***Principles of Gas-Solid Flows***, Cambridge: Cambridge University Press, 1998. Chapter 5.

Ferziger, J. H., Kaper, H. G. ***Mathematical theory of transport processes in gases***, North-Holland, Amsterdam, 1972.

Foscolo, P.U., Gibilaro, L.G. A fully predictive criterion for the transition between particulate and aggregate fluidization. ***Chemical Engineering Science***, 39, 1667, 1984.

Ganser, G.H., Drew, D.A. Nonlinear stability analysis of a uniformly fluidized bed. ***International Journal of Multiphase flow***, v.16, n.3, p.447-460, 1990.

Gidaspow, D., ***Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetics Theory Description***, CA: Academic Press, 1994, chapters 9-10.

Glasser, B.J., Kevrekidis, I.G., Sundaresan, S. One- and two-dimensional travelling wave solutions in gas-fluidized beds. ***Journal of Fluid Mechanics***, v.306, p.183-221, 1996.

Goz, M.F. On the origin of wave patterns in fluidized beds. ***Journal of Fluid Mechanics***, v.240, p.379-404, 1992.

Goz, M.F. Bifurcation of plane voidage waves in fluidized beds. ***Physica D***, v.65, p.319-351, 1993.



- Goz, M.F., Instabilities and the formation of wave patterns in fluidized beds In: Gouesbet, G., Berlemont, A. *Instabilities in Multiphase flows*, New York: Plenum Press, 1993, p.251-259.
- Grace, J. R. The viscosity of fluidized beds, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, v.48, p.30-33, 1970.
- Haff, P. K., Grain flow as a fluid-mechanical. *Journal of Fluid Mechanics*, v.134, p.401-430, 1983.
- Ham, J.M., Thomas, S., Guazzelli, E., Homsy, G.M., Anselmet, M.C. An experimental study of the stability of liquid-fluidized beds. *International Journal of Multiphase flow*, v.16, n.2, p.171-185, 1990.
- Harris, S.E., Crighton, D. G. Solitons, solitary waves, and voidage disturbances in gas fluidized beds. *Journal of Fluid Mechanics*, v.266, p.243-276, 1994.
- Heer, C. V., *Statistical mechanics, kinetic theory and stochastic processes*, New York : Academic Press, 1972.
- Homsy, G.M., El-Kaissy, M.M., Didwania, A. K. Instability waves and the origin of bubbles in fluidized beds-II: Comparison with theory. *International Journal of Multiphase flow*, v.6., p.305-318, 1980.
- Ishii, M., *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two Phase Flow*. Paris: Eyrolles, 1975.
- Jackson, R., . The mechanics of fluidized beds: Part I: The stability of the state of uniform fluidization. *Transactions of the Institute of Chemical Engineers*, v.41, p.13-21, 1963.
- Jenkins, J. T., McTigue, D. F., Transport processes in concentrated suspensions: The role of particle fluctuations. In: Joseph, D. D., Schaeffer, D. G., *Two phase flows and waves*, Michigan: Springer-Verlag, 1990, p.70-79.
- Jenkins, J. T., Richman, M. W., Boundary conditions for planes flows of smooth nearly elastic, circular disks. *Journal of Fluid Mechanics*, v.171, p.53-69, 1986.

- Jenkins, J. T., Savage, S. B., A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics*, v.130, p.187-202, 1983.
- Kai, T., Murakami, M., Yamasaki, K., Takahashi, T. Relationship between apparent bed viscosity and fluidization quality in a fluidized bed with fine particles. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, v.24, n.4, p.494-500, 1990.
- Koch, D. L. Kinetic theory for a monodisperse gas-solid suspension. *Physics Fluids A*, v.2, p.1711-1723, 1990.
- Koch, D. L., Sangani, A. S. Particle pressure and marginal stability limits for a homogeneous monodisperse gas-fluidized bed: kinetic theory and numerical simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 400, p.229-263, 1999.
- Komatsu, T. S., Hayakawa, H., Nonlinear waves in fluidized beds. *Physics Letters A*, v.183, p.56-62, 1993.
- Kunii, D., Levenspiel, O. *Fluidization Engineering*. Washington: Butterworth-Heinemann, 1991.
- Liu, J. T. C. , Nonlinear unstable wave disturbances in fluidized beds. *Proceedings of the Royal Society London: A*, v.389, p.331-347, 1983.
- Liu, J.T.C. Note on a wave-hierarchy interpretation of fluidized bed instabilities. *Proceedings of the Royal Society London: A*, v.380, p.229-239, 1982.
- Louge, M. Y., Mastorakos, E., Jenkins, J. T. The role of particle collision in pneumatic transport. *Journal of Fluid Mechanics*, v.231, p.345-359, 1991.
- Maxey, M. R., Riley, J. J., Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics Fluids*, v.26, p.883-889, 1983.
- Murray, D. On the mathematics of fluidization: Part 1. Fundamental equations and wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, v.21, p.465-493, 1965.

- Musmarra, D., Polleto, M., Vaccaro, S., Clift, R. Dynamic waves in fluidized beds. *Powder Technology*, v.82, p.255-268, 1995.
- Mutsers, S.P.M., Rietema, K. The effect of interparticle forces on the expansion of a homogeneous gas-fluidized bed. *Powder Technology*, 18, p.239-248, 1977.
- Needham, D. J., Merkin, J. H. The evolution of a two-dimensional small-amplitude voidage disturbance in a uniformly fluidized bed. *Journal of Engineering Mathematics*, v.18, p.119-132, 1984.
- Needham, D. J., Merkin, J. H. The existence and stability of quasi-steady periodic voidage waves in a fluidized bed. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, v.37, p.332-339, 1986.
- Needham, D.J., Merkin, J.H. The propagation of a voidage disturbance in a uniformly fluidized bed. *Journal of Fluid Mechanics*, v.131, p.427-454, 1983.
- Poletto, M., Bai, R., Joseph, D.D. Propagation of voidage waves in a two –dimensional liquid-fluidized bed. *International Journal of Multiphase flow*, v.21, n.2, p.223-239, 1995.
- Polleto, M., Massimila, L. Stability analysis of uniformly fluidized beds in terms of the elastic modulus of the dispersed phase. *Powder Technology*, 72, p.89-95, 1992.
- Richardson, J.F., Zaki, W.N. Sedimentation and Fluidization: Part I. *Transactions Institute of Chemical Engineers*, 32, 35, 1954.
- Rietema, K., Piepers, H.W. The effect of interparticle forces on the stability of gas-fluidized beds-I. Experimental evidence. *Chemical Engineering Science*, 45, 6, p.1627-1639, 1990.
- Savage, S. B. Analysis of slow high-concentration flows of granular materials. *Journal of Fluid Mechanics*, v.377, p.1-26, 1998.
- Savage, S. B., Jeffrey, D. J. The stress tensor in a granular flow at high shear rates. *Journal of Fluid Mechanics*, v.110, p.255-272, 1981.

- Saxton, J. A., Fitton, J. B., Vermeulen, T. Cell model theory of homogeneous fluidization: density and viscosity behavior. *AIChE Journal*, v.16, p.120-130, 1970.
- Schugerl, K. Rheological behaviour of fluidized systems. In: DAVIDSON, J.F., HARRISON, D., *Fluidization*, London: Academic Press, 1971, p.261-292.
- Sela, N., Goldhirsch, I., Noskowicz, S. H., Kinetic theoretical study of a simply sheared two-dimensional granular gas to Burnett order. *Physics Fluids*, v.8, p.2337-2353, 1996.
- Segel, I. H., *Mathematical models in molecular and cellular biology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. p.649-727.
- Tsuchiya, K., Furumoto, A., Fan, L., Zhang, J., Suspension viscosity and bubble rise velocity in liquid-solid fluidized beds. *Chemical Engineering Science*, v. 52, n.18, p. 3053-3066, 1997.
- Verloop, J., Heertjes, P.M., Shock waves as a criterion for the transition from homogeneous to heterogeneous fluidization, *Chemical Engineering Science*, 25, p.825-832, 1970.
- Wallis, G. B. *One dimensional Two-Phase Flow*, London: McGraw-Hill, 1969. p.122-160.
- Whitham, G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley & Sons, 1974. Chapter 10.

## Apêndice A- A correlação de Richardson e Zaki (1954)

Richardson e Zaki (1954) estudaram a dinâmica de partículas nos processos de fluidização por líquido e de sedimentação. Os resultados obtidos por tais autores são resumidos pela equação:

$$\frac{\bar{u}}{v_i} = (1 - \phi)^n \quad (\text{A.1})$$

onde “ $v_i$ ” é a velocidade terminal de partícula considerando-se o efeito da parede, dada por:

$$v_i = v_T 10^{-\frac{d_p}{D}} \quad (\text{A.2})$$

Aqui:

$v_T$  - velocidade terminal da partícula isolada em um fluido em repouso.

$D$  – diâmetro do leito.

Desconsiderando-se o efeito da parede, dado por (I.2), e usando-se  $\bar{u} = \bar{u}_0$  e  $u_0(1 - \phi_0) = \bar{u}_0$ , obtém-se de (I.1):

$$\frac{u_0}{v_T} = (1 - \phi_0)^{n-1} \quad (\text{A.3})$$

O expoente “ $n$ ” relaciona-se com o número de Reynolds, dado por:  $Re_T = \frac{\rho_f v_T d_p}{\mu_f}$

$$n = 4.65 + 19.5 \frac{d_p}{D}, \quad Re_T < 0.2$$

$$n = \left[ 4.35 + 17.5 \frac{d_p}{D} \right] Re_T^{-0.03}, \quad 0.2 \leq Re_T < 1$$

$$n = \left[ 4.45 + 18 \frac{d_p}{D} \right] \text{Re}_T^{-0.1}, \quad 1 \leq \text{Re}_T < 200$$

$$n = 4.45 \text{Re}_T^{-0.1}, \quad 200 \leq \text{Re}_T < 500$$

$$n = 2.39, \quad \text{Re}_T \geq 500$$

(A4a, b, c, d, e)

Para leitos fluidizados por água a 25 C e 1 atm, e considerando a velocidade terminal calculada no regime de Stokes, utilizando-se (A.4) obtém-se  $n = 4.35$ . Para o ar nas mesmas condições anteriores, obtém-se  $n = 2.39$ . Portanto uma estimativa razoável para todos os cálculos utilizados no presente trabalho foi situá-lo na faixa de 2 a 4.

## Apêndice B - A derivada $\Gamma_{sw}^2$

Neste apêndice será descrito em detalhe a expansão usada para a obtenção dos termos “ $\Gamma_{sw}^*$ ” nos elementos “ $A_{73}$ ” e “ $A_{75}$ ” da matriz  $A$  definida na Seção 5.5.

Inicialmente definindo a expansão em série de Taylor até a primeira ordem:

$$\Gamma_s(\phi_0 + \phi_1, T_0 + T_1, u_0 + u_1, v_0 + v_1) - \Gamma_s(\phi_0, T_0, u_0, v_0) = \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \phi} \right|_0 \phi_1 + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial T} \right|_0 T_1 + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial u} \right|_0 \cdot u_1 + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial v} \right|_0 \cdot v_1 \quad (B.1)$$

$$= \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \phi} \right|_0 \phi_1 + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial T} \right|_0 T_1 + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial u_{II}} \right|_0 \cdot u_{II} + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial u_{\perp}} \right|_0 \cdot u_{\perp} + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial v_{II}} \right|_0 \cdot v_{II} + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial v_{\perp}} \right|_0 \cdot v_{\perp} \quad (B.2)$$

$$= \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \phi} \right|_0 \phi_1 + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial T} \right|_0 T_1 + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial w^2} \frac{\partial w^2}{\partial u_{II}} \right|_0 \cdot u_{II} + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial w^2} \frac{\partial w^2}{\partial u_{\perp}} \right|_0 \cdot u_{\perp} + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial w^2} \frac{\partial w^2}{\partial v_{II}} \right|_0 \cdot v_{II} + \left. \frac{\partial \Gamma_s}{\partial w^2} \frac{\partial w^2}{\partial v_{\perp}} \right|_0 \cdot v_{\perp} \quad (B.3)$$

Relembrando o estado básico dado por:

$$\begin{aligned} u_{II} &= u_0 \\ u_{\perp} &= 0 \\ u_{mfl} &= u_{mif} \\ u_{mf\perp} &= v_{II} = v_{\perp} = 0 \end{aligned} \quad (B.4)$$

A expressão do termo fonte, reescrita:

$$\Gamma_s^* = \frac{4\beta^{*2} w^{*2}}{(1-\delta)\sqrt{\pi T^*}} \frac{1}{St} \quad (B.5)$$

onde:

$$w^2 = (\mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{u}_{mf\parallel} - \mathbf{v}_{\parallel}) \cdot (\mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{u}_{mf\parallel} - \mathbf{v}_{\parallel}) + (\mathbf{u}_{\perp} - \mathbf{u}_{mf\perp} - \mathbf{v}_{\perp}) \cdot (\mathbf{u}_{\perp} - \mathbf{u}_{mf\perp} - \mathbf{v}_{\perp}) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial w^2}{\partial u_{\parallel}} = 2(u_{\parallel} - u_{mf\parallel} - v_{\parallel}) = 2(u_0 - u_{mf}) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial w^2}{\partial u_{\perp}} = 2(u_{\perp} - u_{mf\perp} - v_{\perp}) = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial w^2}{\partial v_{\parallel}} = -2(u_{\parallel} - u_{mf\parallel} - v_{\parallel}) = -2(u_0 - u_{mf}) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial w^2}{\partial v_{\perp}} = -2(u_{\perp} - u_{mf\perp} - v_{\perp}) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Reescrevendo (B.3):

$$= \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \phi} \Big|_0 \phi_1 + \frac{\partial \Gamma_s}{\partial T} \Big|_0 T_1 + 2(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{mf}) \frac{\partial \Gamma_s}{\partial w^2} \Big|_0 \cdot \mathbf{u}_{\parallel} - 2(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{mf}) \frac{\partial \Gamma_s}{\partial w^2} \Big|_0 \cdot \mathbf{v}_{\parallel} \quad (\text{B.11})$$

Ou em uma forma adimensional, utilizando a correlação de Richardson e Zaki (1954):

$$= \frac{\partial \Gamma_s}{\partial \phi} \Big|_0 \phi_1 + \frac{\partial \Gamma_s^*}{\partial T^*} \Big|_0 T_1^* + 2u_0^* \left( 1 - \left( \frac{1 - \phi_{mf}}{1 - \phi_0} \right)^{n-1} \right) \frac{\partial \Gamma_s^*}{\partial w^{*2}} \Big|_0 \cdot \mathbf{u}_{\parallel}^* - 2u_0^* \left( 1 - \left( \frac{1 - \phi_{mf}}{1 - \phi_0} \right)^{n-1} \right) \frac{\partial \Gamma_s^*}{\partial w^{*2}} \Big|_0 \cdot \mathbf{v}_{\parallel}^* \quad (\text{B.12})$$



## Apêndice C – O efeito da parede

Neste apêndice é demonstrada a influência das paredes do leito fluidizado sobre as características de propagação dos distúrbios isotérmicos unidimensionais.

O ponto de partida para tal investigação é a equação unidimensional obtida no capítulo 3:

$$A_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + B_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial x} + D_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - E_c \nabla^2 \phi_1 + F_c \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi_1 + G_c \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + H_c \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 \quad (3.107)$$

onde:

$$A_c = \left[ 1 + \frac{\delta}{1 - \phi_0} \left[ C - \phi_0 \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) \right] \right]$$

$$B_c = \delta \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) 2u_0$$

$$D_c = \delta \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \left( 1 + \frac{C}{1 - \phi_0} \right) u_0^2$$

$$E_c = p'_{s0}$$

$$F_c = \frac{v St^{-1/2}}{\phi_0}$$

$$G_c = St^{-1/2} \beta_0 \frac{1}{\phi_0(1 - \phi_0)}$$

$$H_c = St^{-1/2} \beta_0 \frac{u_0}{(1 - \phi_0)} + \beta_0 u_0 St^{-1/2} - (1 - \delta) \quad (3.108a, b, c, d, e, f).$$

Reescrevendo-a em coordenadas cilíndricas:

$$A_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + B_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial x} + D_c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - E_c \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi_1 - F_c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi_1 + G_c \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + H_c \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 \quad (C.1)$$

A equação diferencial anterior pode ser resolvida utilizando a técnica de separação de variáveis. Deste modo, definindo uma solução na forma:

$$\phi_1 = \phi_{1m} f_1(r) \exp(i k x) \exp(\sigma t) \quad (C.2)$$

A substituição na equação anterior produz:

$$(E_c + F_c \sigma) \frac{d^2 f_1}{dr^2} + (E_c + F_c \sigma) \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} + (i k H_c - F_c k^2 - D_c k^2 + G_c \sigma + i k B_c + A_c \sigma^2) f_1 = 0 \quad (C.3)$$

A equação anterior pode ser posta na forma de uma equação diferencial de Bessel, dada por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + Q y = 0 \quad (C.4)$$

Cuja solução é:

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \quad (C.5)$$

onde as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas pelas condições de contorno:

Comparando as Equações III-3 e III-4 tem-se:

$$Q = \frac{(i k H_c - F_c k^2 - D_c k^2 + G_c \sigma + i k B_c + A_c \sigma^2)}{(E_c + F_c \sigma)} \quad (C.6)$$

Para a obtenção da solução de (C.3) faz-se necessária à introdução de uma nova variável independente:

$$s = \sqrt{Q}r \quad (C.7)$$

Nesta situação as derivadas tornam-se:

$$\frac{df_1}{dr} = \frac{df_1}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{df_1}{ds} \sqrt{Q} \quad (C.8)$$

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} = \frac{d^2 f_1}{ds^2} Q \quad (C.9)$$

E a Equação (C.3):

$$\frac{d^2 f_1}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{df_1}{ds} + f_1 = 0 \quad (C.10)$$

Cuja solução é dada por:

$$f_1(s) = C_1 J_0(\sqrt{Q}r) + C_2 Y_0(\sqrt{Q}r) \quad (C.11)$$

Na solução anterior a função “ $Y_0$ ” assume valor infinito para  $r = 0$ , i.e, centro do leito. Como o valor da fração de sólidos deve permanecer finito no centro do leito, é necessário que  $C_2 = 0$ . Desta forma a solução é determinada pela primeira parcela. Por outro lado, admitindo que a fração de sólidos assuma um valor constante  $\phi_w^{33}$  na parede do leito ( $r = R$ ), tem-se:

$$J_0(\sqrt{Q}R) = 0 \quad (C.12)$$

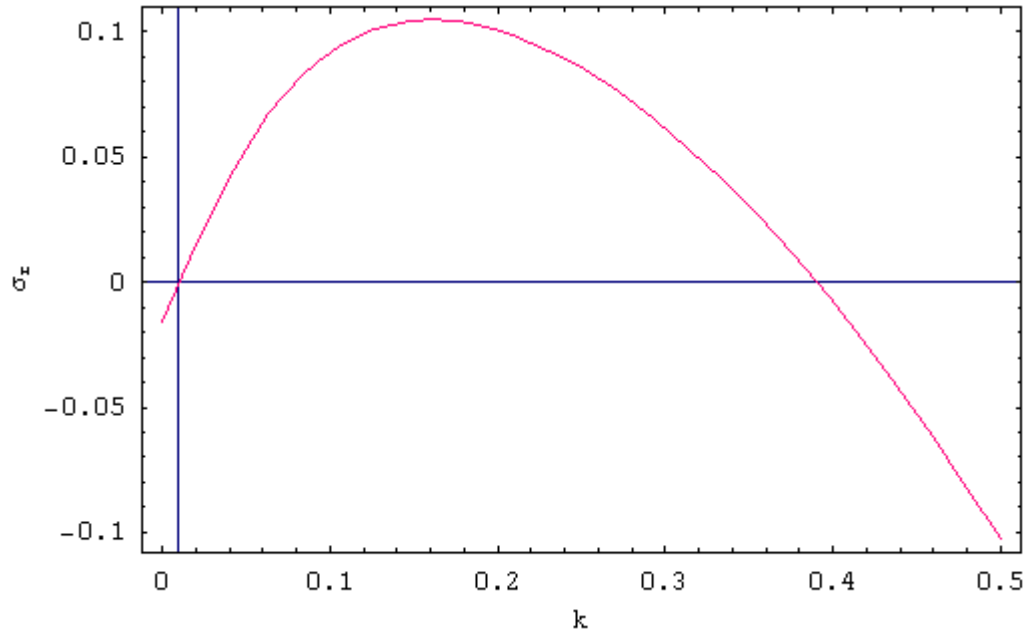
---

<sup>33</sup> Por simplicidade será admitido que  $\phi_w = 0$

As soluções da equação anterior correspondem às raízes da Equação de Bessel:

$$\sqrt{QR} = \alpha_m \quad (C.13)$$

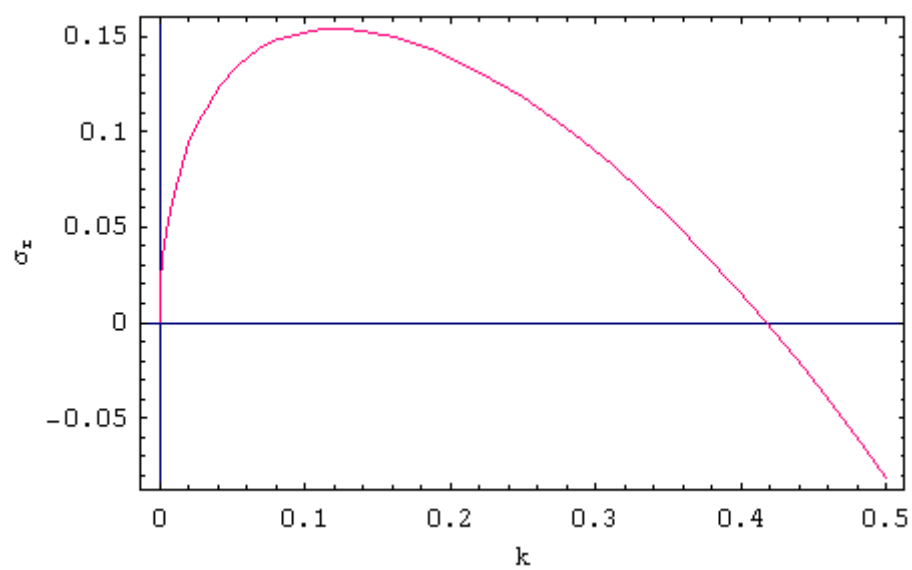
Introduzindo a Equação (C.6) na equação anterior é possível determinar o valor “ $\sigma$ ” como função do número de onda “ $k$ ”. Na Figura C.1 a seguir, encontra-se ilustrado um caso típico da influência de parede sobre o fator de crescimento da instabilidade.



**Figura C.1 – Efeito de parede sobre o fator de crescimento da instabilidade**

Conforme a figura a presença de efeitos de parede impõe um comprimento de onda máximo (i.e. mínimo valor do número de onda). Para valores menores a este observa-se instabilidade ( $\sigma_r > 0$ )

Além disso, a comparação com o caso onde estão ausentes efeitos de parede, ilustrado na Figura (C.2), indica uma redução do máximo valor do fator de crescimento. Deste modo, pode-se concluir que a presença de efeitos de parede é estabilizadora.



**Figura C.2 – Mesma situação do caso anterior desprezando-se os efeitos de parede**

## Apêndice D – Visualização

O presente apêndice tem por finalidade ilustrar de forma sucinta os fenômenos de propagação de instabilidades descritos pelos modelos isotérmicos e não isotérmicos estudados no presente trabalho.

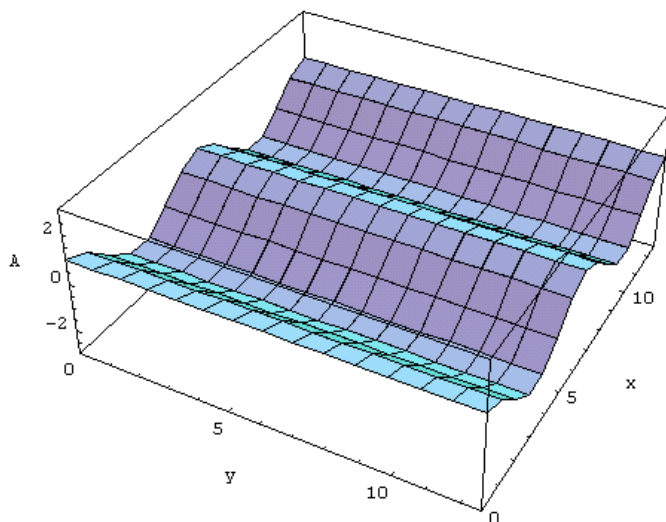
Considerando as perturbações harmônicas dadas por:

$$A = A_m e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^* + \sigma t} \quad (\text{D.1})$$

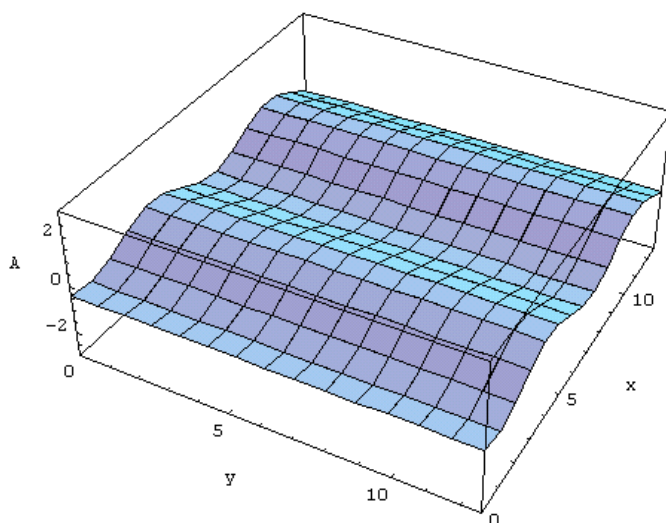
Inicialmente será ilustrado o caso de uma onda propagando-se na direção  $x$ , estável e com frequência não nula. Para esta situação, “ $A_m$ ” e  $\mathbf{k}$  serão admitidos constantes. Na Figura D.1 encontra-se ilustrada a configuração desta onda em um instante inicial arbitrário. Na Figura D.2 encontra-se ilustrada a configuração para um instante posterior. A comparação entre as figuras revela dois fenômenos distintos:

- O decréscimo da amplitude da onda com o tempo, i.e., sua estabilidade;
- O fenômeno de deslocamento da onda.

Considerando a direção “ $x$ ” correspondente à vertical, as figuras anteriores ilustram o caso isotérmico estável classicamente investigado na literatura.



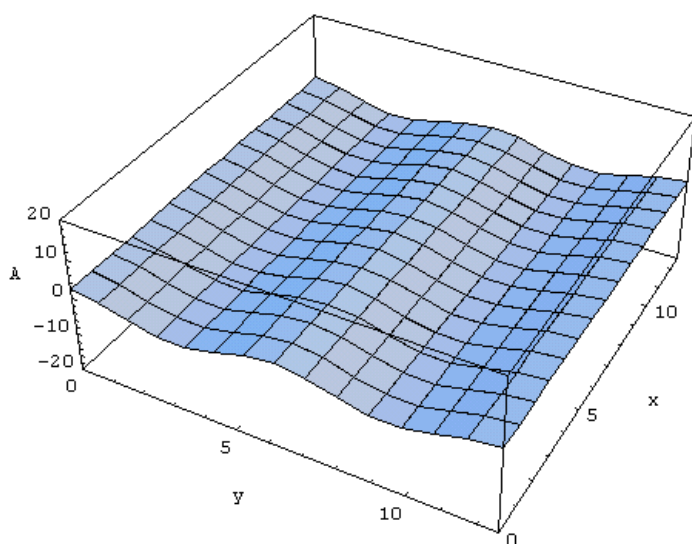
**Figura D.1 - Onda unidimensional propagando-se na direção  $x$ , configuração no instante inicial.**



**Figura D.2 - Onda unidimensional propagando-se na direção  $x$ , configuração correspondente ao instante final**

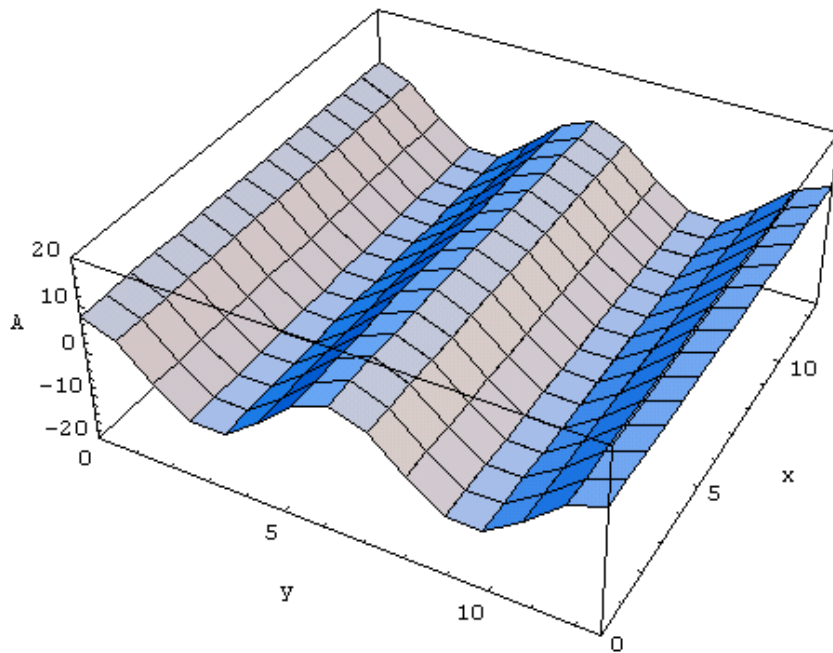
A seguir será ilustrada a situação obtida para o modelo não isotérmico. Tal modelo corresponde à propagação de um distúrbio instável na direção horizontal “y” e com frequência nula. Nas Figuras D.3 e D.4 encontra-se ilustrada a configuração da onda em dois instantes sucessivos. A comparação entre as figuras revela dois fenômenos distintos:

- O crescimento da amplitude da onda com o tempo, i.e., sua instabilidade;
- A ausência de deslocamento da onda.



**Figura D.3 - Onda unidimensional na direção y, configuração no instante inicial.**

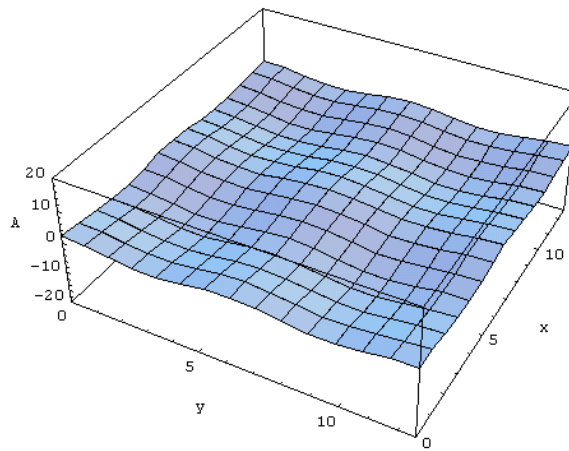




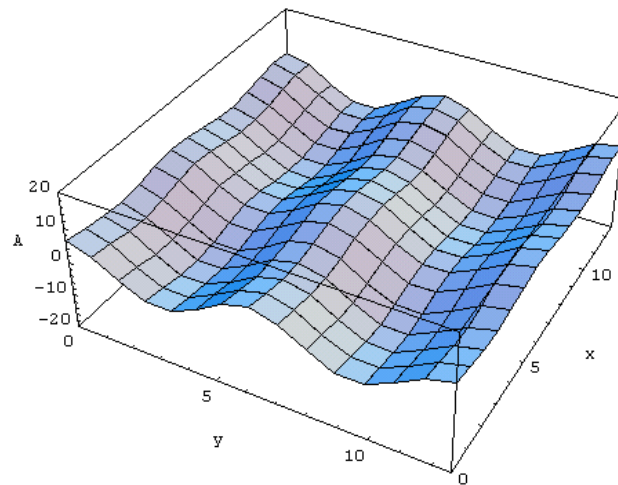
**Figura D.4 - Onda unidimensional na direção y, configuração no instante final.**

Nas Figuras D.5 e D.6 ilustra-se a propagação de uma onda composta de duas componentes:

- Uma componente de maior instabilidade propagando-se na direção y e com frequência nula;
- Uma componente de menor instabilidade propagando-se na direção x e com frequência não nula;



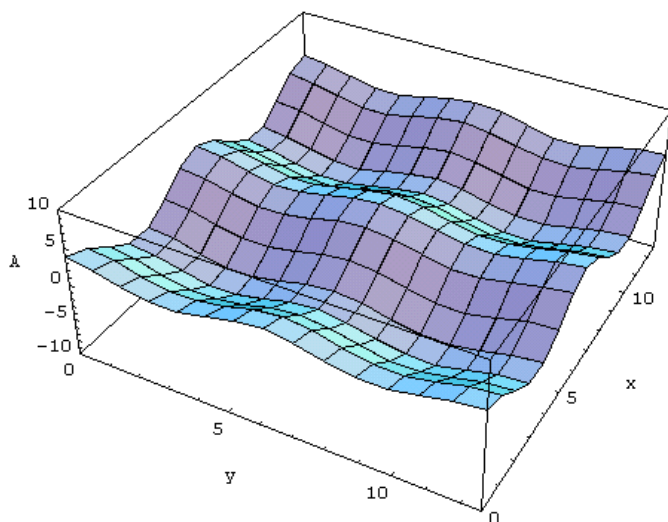
**Figura D.5 - Onda bidimensional propagando-se nas direções x e y, configuração no instante inicial.**



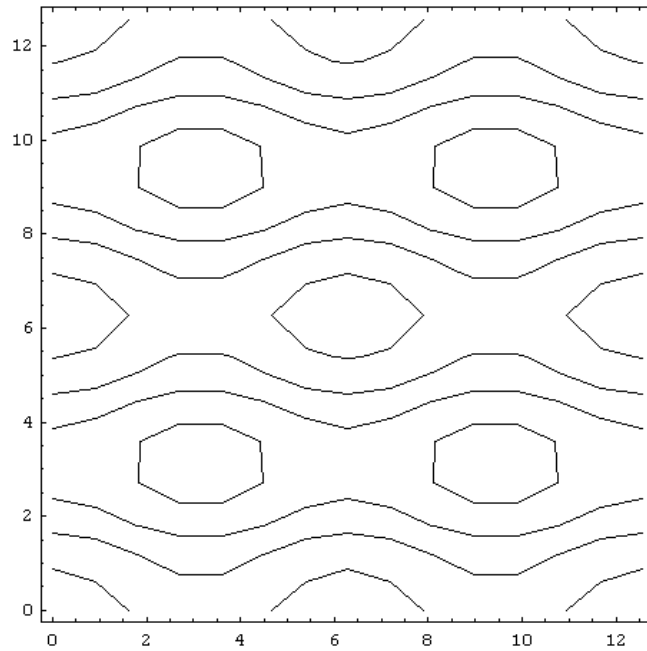
**Figura D.6 - Onda bidimensional propagando-se nas direções x e y, configuração no instante final.**

As Figuras anteriores sugerem uma possível origem para as instabilidades secundárias e bolhas observadas experimentalmente em leitos fluidizados. Tal mecanismo é, também, melhor

ilustrado nas Figuras D.7 a D.10. Na Figura D.7 encontra-se ilustrada a configuração de um distúrbio bidimensional em um dado instante cujo fator de crescimento da amplitude do distúrbio na direção “y” (correspondente à direção horizontal do leito) é vinte vezes superior ao respectivo fator na direção “x”. Na Figura D.8 encontra-se ilustrado o contorno correspondente à superfície dada na Figura D.7. São observadas a presença de regiões de forma oval com certa similaridade com as regiões com baixas frações de sólidos conhecidas como bolhas.



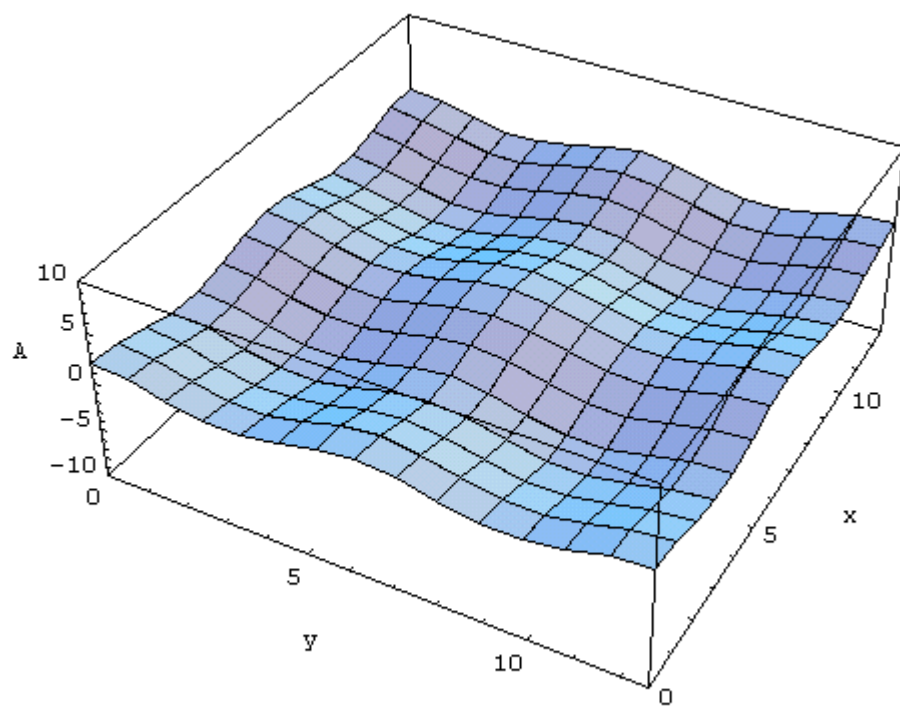
**Figura D.7 - Onda bidimensional com fator de crescimento na direção y vinte vezes superior ao respectivo fator na direção x.**



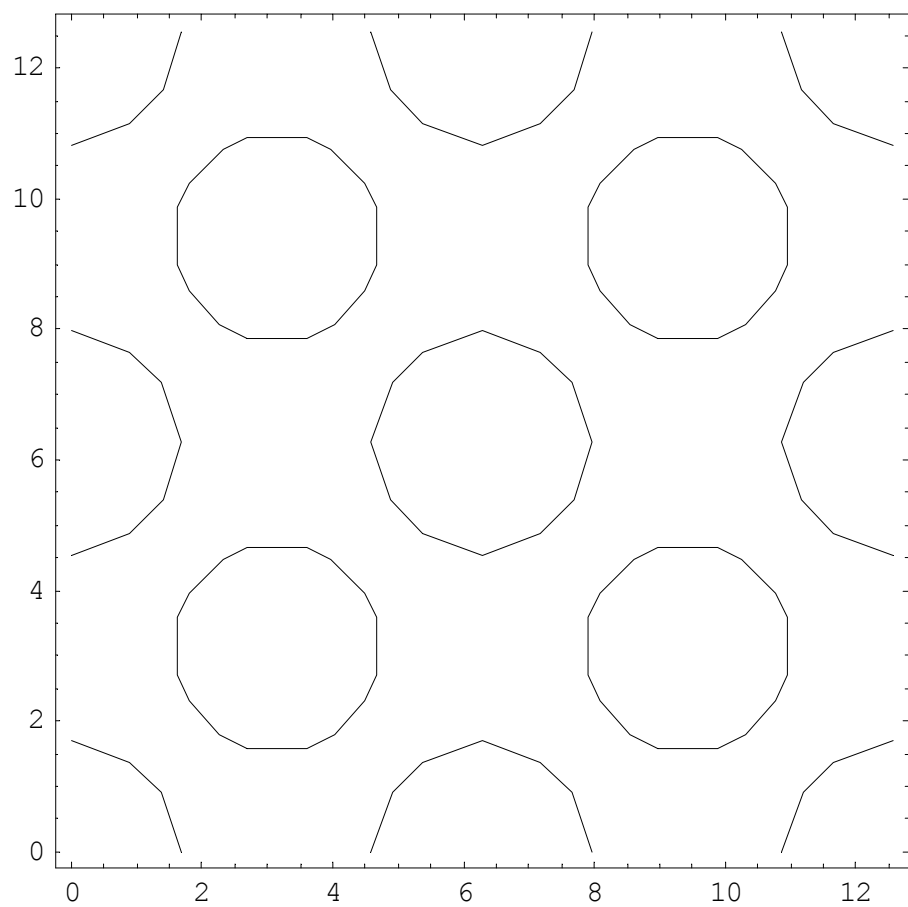
**Figura D.8 – Contorno correspondente à superfície dada na Figura anterior.**

As Figuras D.9 e D.10 ilustram a situação correspondente a uma onda bidimensional com fator de crescimento na direção “y” cinco vezes menor que o respectivo fator na direção x. Uma análise da Figura D.10 revela que nessa situação as estruturas tomam forma circular.

Finalizando, a análise das quatro últimas figuras sugere a formação de bolhas quando o fator de crescimento na direção horizontal é positivo.



**Figura D.9 - Onda bidimensional com fator de crescimento na direção  $y$  cinco vezes menor que o respectivo fator na direção  $x$ .**



**Figura D.10 - Contorno correspondente à superfície dada na Figura anterior**